Kolejne twierdzenie nazwano na cześć Cantora, który udowodnił, że zstępujący ciąg domkniętych podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych o średnicach dążących do zera ma przekrój jednopunktowy. W przypadku ogólnym twierdzenie to znajduje się w książce Hausdorffa [215]. Kuratowski w pracy [295] wykazał, że własność ta charakteryzuje zupełność.

Twierdzenie 4.1.7 (lemat Cantora). *Przestrzeń metryczna jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zstępujący ciąg jej podzbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma przekrój jednoelementowy.*

Dowód. Załóżmy, że $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbiorów domkniętych przestrzeni metrycznej zupełnej $(X, d)$ oraz że $F_{n+1} \subseteq F_n \subseteq X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybierzemy $x_n \in F_n$, to ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie spełniał warunek Cauchy'ego. Faktycznie, jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Wówczas dla $m, n > n_0$ mamy $d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$, bo $F_m \subseteq F_{n_0}$ i $F_n \subseteq F_{n_0}$. Ponieważ przestrzeń $(X, d)$ jest zupełna, to istnieje takie $x \in X$, że $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $x \in \operatorname{cl} F_n = F_n$, bo $\{x_m \colon m \geq n\} \subseteq F_n$, a w konsekwencji $x \in \bigcap\{F_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Jeśli $y \neq x$, to $d(x, y) > 0$, czyli istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\operatorname{diam} F_n < d(x, y)$, a więc $y \notin F_n$. To kończy pierwszą część dowodu.

Aby wykazać implikację odwrotną, ustalmy ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i rozważmy zbiory $F_n = \operatorname{cl}\{x_m \colon m \geq n\}$. Oczywiście $F_{n+1} \subseteq F_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, a ponieważ ciąg spełnia warunek Cauchy'ego, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $\operatorname{diam}\{x_m \colon m > n_0\} \leq \varepsilon$. Z lematu 4.1.6 mamy $\operatorname{diam} F_{n_0} \leq \varepsilon$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Ustalmy $x \in \bigcap\{F_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ możemy zakładać, że ciąg nie jest stały, to $x \in (\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})^d$. Na mocy lematu 2.2.15 mamy więc $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, co kończy dowód. □

Jeśli $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zstępującym zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej zwartej $(X, d)$, to $\bigcap\{F_n \colon n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, bo każda rodzina zstępująca jest scentrowana. Ponadto, jeśli średnice zbiorów $F_n$ zmierzają do 0, to ich przekrój jest jednym punktem. Faktycznie, jeśli $x, y \in \bigcap\{F_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, to $d(x, y) < \operatorname{diam}(F_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, a więc $x = y$. Z lematu Cantora wynika zatem następujący wniosek.

Wniosek 4.1.8. *Każda przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.*

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, bo na przykład przestrzeń $\mathbb{R}$ jest zupełna, a nie jest zwarta; p. przykład 2.2.17. Zwartość od zupełności różni całkowita ograniczoność, która jest własnością metryczną.

Definicja 4.1.9 (metryka całkowicie ograniczona). *Metryka $d$ na zbiorze $X$ jest* **całkowicie ograniczona**, *gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją takie zbiory*

*$A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, że $A_1 \cup \ldots \cup A_n = X$ oraz $\operatorname{diam} A_i \leq \varepsilon$ dla $i \leq n$. Przestrzeń metryczna $(X, d)$ jest wtedy całkowicie ograniczona*[1].

Z definicji zwartości wynika, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest całkowicie ograniczona, bo dla każdego $\varepsilon > 0$ można ją pokryć skończenie wieloma kulami o promieniu $\frac{\varepsilon}{2}$. Zauważmy, że każda podprzestrzeń przestrzeni całkowicie ograniczonej jest całkowicie ograniczona.

TWIERDZENIE 4.1.10. *Przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i całkowicie ograniczona.*

DOWÓD. Załóżmy, że $(X, d)$ jest przestrzenią zupełną, całkowicie ograniczoną. Przypuśćmy, że $\mathcal{U}$ jest jej pokryciem otwartym, które nie zawiera pokrycia skończonego. Wówczas konstruujemy zstępujący ciąg $\{F_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ niepustych podzbiorów domkniętych przestrzeni $X$ takich, że $\operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i zbiory $F_n$ mają własność:

(W) żadna skończona podrodzina rodziny $\mathcal{U}$ nie pokrywa zbioru $F_n$.

Jako $F_1$ przyjmijmy $X$. Jeśli zbiór $F_n$ jest już określony, to korzystając z faktu, że przestrzeń $X$ jest całkowicie ograniczona, pokrywamy go skończenie wieloma podzbiorami o średnicy nie większej niż $\frac{1}{n+1}$. Wówczas, na mocy założenia indukcyjnego, przynajmniej jeden z tych zbiorów nie ma pokrycia skończonego elementami rodziny $\mathcal{U}$. Zbiór ten przyjmujemy jako $F_{n+1}$. Ponieważ średnica zbioru jest taka sama jak średnica jego domknięcia (p. lemat 4.1.6), to możemy zakładać, że są to zbiory domknięte niepuste. Na mocy lematu Cantora (p. twierdzenie 4.1.7) istnieje taki punkt $x \in X$, że $\bigcap\{F_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$. Ponieważ $\mathcal{U}$ jest pokryciem, to $x \in U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}$. Istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\frac{1}{n} < \operatorname{dist}(x, X \setminus U)$. Wówczas $F_n \subseteq U$. Faktycznie, gdyby istniał punkt $y \in F_n \setminus U$, to mielibyśmy

$$\operatorname{diam} F_n \geq d(x, y) \geq \operatorname{dist}(x, X \setminus U) > \frac{1}{n},$$

bo $x \in F_n$. To prowadzi do sprzeczności, bo $\operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{n}$. Zbiór $F_n$ jest zatem zawarty w pewnym elemencie pokrycia $\mathcal{U}$, co jest sprzeczne z warunkiem (W). Każda przestrzeń zupełna całkowicie ograniczona jest zatem zwarta. Implikacja odwrotna jest oczywista. □

Dla przestrzeni zupełnych zachodzi uogólnienie twierdzenia 1.9.30, które mówi, że każdy podzbiór domknięty w sobie gęsty przestrzeni metrycznej zwartej zawiera zbiór Cantora.

TWIERDZENIE 4.1.11. *Niech $f \colon X \to Y$ będzie surjekcją ciągłą przestrzeni metrycznej zupełnej na w sobie gęstą przestrzeń Hausdorffa. Wówczas istnieje taki zbiór Cantora $C \subseteq X$, że $f \restriction C$ jest zanurzeniem homeomorficznym.*

---

[1]Całkowitą ograniczoność można też zdefiniować inaczej: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór skończony $\{x_1, \ldots, x_n\}$, że dla każdego $x \in X$ istnieje takie $k \leq n$, że $d(x, x_k) < \varepsilon$; patrz np. [153]. Zbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bywa też nazywany *$\varepsilon$-siecią*.