4 Równanie Diraca

Ten rozdział zawiera wprowadzenie do równania Diraca, które jest relatywistycznym sformułowaniem mechaniki kwantowej, używanym do opisu podstawowych fermionów Modelu Standardowego. Szczególny nacisk jest położony na rozwiązania równania Diraca dotyczące cząstek swobodnych, które w kolejnych rozdziałach zostaną wykorzystane do opisu fermionów w obliczeniach przekrojów czynnych i szybkości rozpadów.

4.1. Równanie Kleina-Gordona

Jednym z wymogów relatywistycznego sformułowania mechaniki kwantowej jest to, że powiązane równanie falowe jest niezmiennikiem Lorentza. Równanie Schrödingera, wprowadzone w punkcie 2.3.1, jest pochodną po czasie pierwszego rzędu oraz pochodną po położeniu drugiego rzędu. Ze względu na różną zależność od współrzędnych czasowych i przestrzennych równanie Schrödingera wyraźnie nie jest niezmiennikiem Lorentza, a zatem nie może stanowić opisu cząstek relatywistycznych. Brak niezmienniczości równania Schrödingera w przekształceniach Lorentza jest konsekwencją jego wyznaczenia z nierelatywistycznej zależności między energią cząstki swobodnej a jej pędem

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

Pierwsza próba skonstruowania relatywistycznej teorii mechaniki kwantowej opierała się na równaniu Kleina-Gordona. Równanie falowe Kleina-Gordona otrzymuje się, zapisując zależność energii i pędu Einsteina,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2,$$

w postaci operatorów działających na funkcję falową,

$$\hat{E}^2\psi(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{p}}^2\psi(\mathbf{x}, t) + m^2\psi(\mathbf{x}, t).$$

Wykorzystując operatory energii i pędu określone w punkcie 2.3.1,

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla} \quad \text{and} \quad \hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t},$$

otrzymujemy równanie falowe Kleina-Gordona,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}^2 \psi - m^2 \psi. \tag{4.1}$$

Równanie Kleina-Gordona, które zawiera pochodne drugiego rzędu zarówno po czasie, jak i położeniu, można wyrazić w postaci wyraźnie niezmienniczej względem transformacji Lorentza

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0, \tag{4.2}$$

gdzie

$$\partial^\mu \partial_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

jest iloczynem skalarnym dwóch czterowektorów niezmienniczych względem transformacji Lorentza.

Równanie Kleina-Gordona ma rozwiązania w postaci fal płaskich,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ne^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}, \tag{4.3}$$

które po podstawieniu do (4.2) implikują, że

$$E^2 \psi = \mathrm{p}^2 \psi + m^2 \psi,$$

a zatem (z konstrukcji) rozwiązania równania Kleina-Gordona w postaci fal płaskich spełniają zależność energii i pędu Einsteina, gdzie energia cząstki jest powiązana z jej pędem wzorem

$$E = \pm\sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2}.$$

W mechanice klasycznej rozwiązania dotyczące ujemnej energii można odrzucić jako niefizyczne. Jednak w mechanice kwantowej wymagane są wszystkie rozwiązania w celu utworzenia pełnego zbioru stanów i rozwiązań z energią ujemną po prostu nie można odrzucić. Chociaż nie jest jasne, jak należy interpretować rozwiązania dotyczące ujemnej energii, istnieje poważniejszy problem dotyczący gęstości prawdopodobieństwa. Wyrażenia na gęstość prawdopodobieństwa i prąd prawdopodobieństwa dla równania Kleina-Gordona można zidentyfikować zgodnie z procedurą opisaną w punkcie 2.3.2. Biorąc różnicę $\psi^* \times (4.1) - \psi \times (4.1)^*$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} &= \psi^*(\nabla^2 \psi - m^2 \psi) - \psi(\nabla^2 \psi^* - m^2 \psi^*) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \psi^*). \end{aligned} \tag{4.4}$$