Czas na podsumowanie:

1. **Funkcja zeta Riemanna koduje rozmieszczenie potęg liczb pierwszych wśród wszystkich liczb.**

Kluczem jest wzięcie logarytmu, a następnie obliczenie pochodnej $\zeta(s)$ (sprowadza się to do utworzenia $\frac{d\zeta}{ds}(s)/\zeta(s)$. Zakładając że część rzeczywista s jest > 1, to logarytmując $\zeta(s)$ i używając rezultatu Eulera dotyczącego nieskończonego iloczynu otrzymamy:

$$\log \zeta(s) = \sum_{\text{liczba pierwsza } p} -\log(1 - p^{-s})$$

i możemy to zrobić wyraz po wyrazie, ponieważ część rzeczywista s jest > 1. Następnie pochodna daje nam:

$$\frac{d\zeta}{ds}(s)/\zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s},$$

gdzie

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log(p), & \text{gdy } n = p^k \text{ dla liczby pierwszej } p \text{ i } k > 0, \\ 0, & \text{gdy } n \text{ nie jest potęgą liczby pierwszej.} \end{cases}$$

W szczególności funkcja $\Lambda(n)$ „zapisuje" rozmieszczenie potęg liczb pierwszych.

2. **Znajomość zer i biegunów funkcji analitycznej mówi o niej wiele.**

Na przykład biorąc pod uwagę wielomiany lub nawet funkcje wymierne: jeśli wiemy, że pewna funkcja wymierna $f(s)$ ma zero jednokrotne w 0, znika w nieskończoności i ma podwójny biegun w $s = 2$, a w pozostałych punktach ma skończone niezerowe wartości, to natychmiast wywnioskujemy, że tą tajemniczą funkcją jest $s/(s-2)^2$.

Znajomość samych zer i biegunów (na płaszczyźnie zespolonej) funkcji zeta Riemanna nie daje nam wyczerpujących informacji o całej funkcji. Musimy coś wiedzieć o jej zachowaniu w nieskończoności – gdyż przykładowo pomnożenie funkcji przez e^z nie zmienia struktury jej zer i biegunów.

Ale pełne zrozumienie zer i biegunów $\zeta(s)$ da nam wszystkie informacje potrzebne do ustalenia położenia liczb pierwszych wśród innych liczb.

Oto ostateczne rezultaty:

a) Co do biegunów: $\zeta(s)$ ma jeden biegun. Znajduje się w $s = 1$ i jest rzędu 1 (biegun jednokrotny).

b) Co do zer: Wspomnieliśmy już o zerach trywialnych (w ujemnych parzystych). Jednakże funkcja $\zeta(s)$ ma nieskończenie wiele zer *nietrywialnych*. Wiemy, że zera te znajdują się pionowym pasie

$$0 < \text{część rzeczywista } s < 1.$$

I teraz kolejne równoważne sformułowanie hipotezy Riemanna. Jest ono najbardziej zbliżone do tego, które podał w swoim pamiętniku z 1859 roku:

Hipoteza Riemanna (czwarte ujęcie)

Wszystkie nietrywialne zera funkcji $\zeta(s)$ znajdują się na prostej pionowej płaszczyzny zespolonej. Prosta ta składa się z punktów o części rzeczywistej $= \frac{1}{2}$. Zera te to nic innego niż $\frac{1}{2} \pm i\theta_1$, $\frac{1}{2} \pm i\theta_2$, $\frac{1}{2} \pm i\theta_3$, gdzie $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ stanowią widmo liczb pierwszych, o których wielokrotnie pisaliśmy w poprzednich rozdziałach.

Wartość „$\frac{1}{2}$" pojawiająca się we wzorze na zera jest bezpośrednio związana i wynikająca z hipotezy Riemanna, z tym że $\pi(X)$ jest przybliżeniem kwadratowym funkcji $\mathrm{Li}(X)$. Oznacza to, że błąd przybliżenia jest ograniczony przez $X^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ Postuluje się również, że *wszystkie* zera funkcji $\zeta(s)$ są zerami jednokrotnymi.

Tak sam Riemann pisał o swojej hipotezie:

> „Rzeczywiście w tych granicach można znaleźć pierwiastki rzeczywiste. Jest bardzo prawdopodobne, że wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.
>
> Z pewnością można by sobie życzyć bardziej ścisłego dowodu; ja tymczasem, po kilku daremnych próbach, tymczasowo odłożyłem go na później, ponieważ wydaje się on zbędny w moich przyszłych badaniach".

W tym cytacie Riemann odnosił się do θ_i jako do pierwiastków. Stwierdzenie, że są one „rzeczywiste" jest równoważne hipotezie Riemanna.

Funkcja zeta jak imadło ściska w objęciu rozmieszczenie liczb pierwszych wraz z ich widmem!

Prosta geometryczna własność tych zer (leżą na prostej!) jest bezpośrednio odpowiedzialna za głębokie (i trudne do wyrażenia) prawidłowości liczb pierwszych. Sugeruje również, że te zera wraz z korowodem poprawek Riemanna – gdy naprawdę zrozumiemy ich przesłanie – mogą pozwolić nam na lepsze zrozumienie arytmetyki. Ten nieskończony