7 Nieskończoność

Jak wielka jest nieskończoność? Najprostsza odpowiedź jest następująca: ∞ (ten symbol oznacza nieskończoność) jest bardzo duża. Pomyślmy o osi liczbowej z coraz większymi liczbami, ciągnącej się „aż do nieskończoności". Dla każdej ogromnej liczby, powiedzmy, 10^{1000}, istnieje liczba jeszcze większa, taka jak $10^{1000} + 1$.

Właśnie takie jest tradycyjne rozumienie nieskończoności, z liczbami postępującymi jedna za drugą bez ograniczenia. Matematycy używają pojęcia nieskończoności na wiele różnych sposobów, ale w żadnym razie nie należy jej traktować jako zwykłą liczbę – bo nią nie jest.

Przeliczanie Niemiecki matematyk Georg Cantor przekazał nam zupełnie odmienną koncepcję nieskończoności. Samodzielnie stworzył teorię, która stała się motorem napędzającym wiele działów współczesnej matematyki. Pojęcie, na którym oparta jest teoria Cantora, ma wiele wspólnego z czynnością przeliczania, prostszą niż ta, którą wykonujemy na co dzień.

Wyobraźmy sobie farmera, który nic nie wie o liczeniu z użyciem liczb. Skąd ma on wiedzieć, ile ma owiec? Proste – wypuszczając owce rano na pastwisko, będzie mógł stwierdzić wieczorem, czy wszystkie wróciły, jeśli po wyjściu każdej owcy odłoży jeden kamyczek z kupki ułożonej przy wyjściu z zagrody. Gdyby któraś owca nie dotarła z powrotem do zagrody, na kupce pozostanie jeden kamyczek. Nawet nie używając liczb,

OŚ CZASU (rok)

350
Arystoteles odrzuca pojęcie aktualnej nieskończoności.

1639
Girard Desargues wprowadza pojęcie nieskończoności do geometrii.

farmer postępuje bardzo matematycznie, odwołuje się bowiem do pojęcia wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania między owcami a kamyczkami. Ten prosty pomysł ma zaskakujące konsekwencje.

Teoria Cantora dotyczy zbiorów (a zbiór to po prostu mnogość obiektów). Na przykład **N** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...} jest zbiorem (dodatnich) liczb całkowitych. Mając zbiór, możemy mówić o jego podzbiorach, czyli zawartych w nim mniejszych zbiorach. Najbardziej narzucającymi się podzbiorami naszego przykładowego zbioru **N** są podzbiory **Np** = {1, 3, 5, 7, ...} i **P** = {2, 4, 6, 8, ...}, odpowiednio, zbiory liczb nieparzystych i parzystych. Jaka mogłaby być odpowiedź na pytanie, czy tyle samo jest liczb nieparzystych, co parzystych? Co prawda, nie da się policzyć elementów w każdym zbiorze i porównać wyników, jednak odpowiedź z pewnością powinna brzmieć „tak". Na czym opiera się to przekonanie? Na wrażeniu, że „połowa liczb całkowitych dodatnich to liczby nieparzyste, a połowa – liczby parzyste". Cantor zgodziłby się z naszą odpowiedzią, podałby jednak inne uzasadnienie. Powiedziałby, że dla każdej liczby nieparzystej mamy parzystego „partnera", który z nią sąsiaduje. Stwierdzenie, że zbiory **Np** i **P** mają tyle samo elementów opiera się na połączeniu każdej liczby nieparzystej w parę z liczbą parzystą:

Np:	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
P:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22...

Gdybyśmy teraz zapytali, czy liczb całkowitych dodatnich jest tyle samo, ile liczb *parzystych*, odpowiedź mogłaby brzmieć „nie" – z uzasadnieniem, że zbiór **N** ma dwa razy tyle liczb ile zbiór liczb parzystych.

Jednakże pojęcie „więcej" staje się dość mgliste, gdy mówimy o zbiorach nieskończonych. Lepiej zatem wrócić do koncepcji wzajemnie jednoznacz-

1655

Przypuszczalnie John Wallis pierwszy wprowadza symbol ∞ („węzeł miłości") na oznaczenie nieskończoności.

1874

Cantor nadaje pojęciu nieskończoności ścisły sens i określa różne jej poziomy.

1960+

Abraham Robinson buduje arytmetykę niestandardową, opartą na pojęciu wielkości nieskończenie małej.