

Rysunek 9.3

nowej linii kropkowanej na rysunku 9.3, przestrzeń nie wraca do punktu wyjścia – nastąpiło w niej odbicie z powodu „skręcenia” powierzchni, a nie zwykły obrót.

Gdy już zdefiniowaliśmy pojęcie przesunięcia wektora równoległe względem siebie, możemy znaleźć rzeczywisty wzór na tensor krzywizny, idąc ścieżką ABCD na rysunku 9.2. Różnice wektora przy każdym nieskończenie małym przesunięciu są dane symbolami Christoffela Γ . Ponieważ jednak nie są one dokładnie takie same wzdłuż (AB) i (CD), choć przesunięcia są wzajemnymi negacjami, wektor nie wraca do swojej poprzedniej wartości. Możemy zrozumieć, jak gradienty symboli Christoffela wchodzi w grę. Przeprowadzając działania algebraiczne, otrzymujemy wyrażenie z równania (9.2.14).

Można wykazać, że sam tensor krzywizny spełnia tożsamość Bianchiego

$$R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta;\gamma} + R^\mu{}_{\sigma\beta\gamma;\alpha} + R^\mu{}_{\sigma\gamma\alpha;\beta} = 0. \quad (9.3.7)$$

Nie znam, tak z głowy, geometrycznego znaczenia tożsamości Bianchiego. Istnieje znane równanie elektrodynamiki, które można ująć w identycznej postaci z wyjątkiem liczby wymiarów. Tensor pola jest w kategoriach potencjału wektorowego dany wzorem

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (9.3.8)$$

Innymi słowy, $F_{\mu\nu}$ jest rotacją jakiegoś wektora. Ale charakterystykę $F_{\mu\nu}$ zawartą w stwierdzeniu, że $F_{\mu\nu}$ jest rotacją, równie dobrze opisuje tożsamość

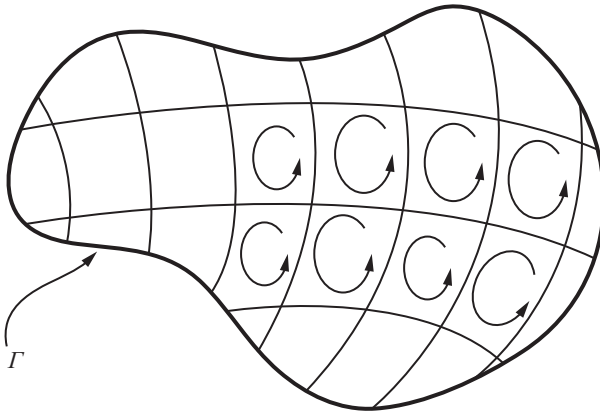
$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0, \quad (9.3.9)$$

która ma postać taką jak tożsamość Bianchiego. Właściwość rotacji może być powiązana z całką po ścieżce za pomocą twierdzenia Stokesa,

$$\oint_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{S}, \quad (9.3.10)$$

gdzie druga całka jest całką powierzchniową po dowolnej powierzchni ograniczonej ścieżką Γ .

W przypadku grawitacji analogia może być następująca: całka po ścieżce reprezentuje zmianę wektora, gdy przesuwamy go, utrzymując go równoległe do samego siebie, wzdłuż zamkniętej ścieżki Γ . Możliwe, że ta całkowita zmiana jest związana z całką po dowolnej dwuwymiarowej hiperpowierzchni ograniczonej przez Γ . Dowodu takiego związku można szukać w analogii do dowodu twierdzenia Stokesa, w którym rozważa się skończoną powierzchnię jako siatkę o nieskończenie małych oczkach, na przykład tak, jak to pokazano na rysunku 9.4. Suma wkładów każdego nieskończenie małego oczka siatki jest pokazana jako odpowiednik całki po ścieżce. Gdy spojrzymy na tę sytuację jako na analogię w większej liczbie wymiarów, możemy lepiej zrozumieć rolę tożsamości Bianchiego w opisie natury krzywizny przestrzeni.



Rysunek 9.4

9.4. Związek między krzywiznami a materią

Widzieliśmy, jak efekty pól grawitacyjnych mogą być opisane w naszej interpretacji geometrycznej za pomocą tensora krzywizny $R^{\mu}_{\nu\sigma\tau}$. Pozostaje tylko zadanie połączenia tensora krzywizny ze źródłami grawitacji, materii i energii. Pierwszą rzeczą, którą robimy, jest zwinienie pierwszego i ostatniego indeksu tensora krzywizny, aby otrzymać tensor Ricciego

$$R_{\nu\sigma} = R^{\mu}_{\nu\sigma\mu}. \quad (9.4.1)$$