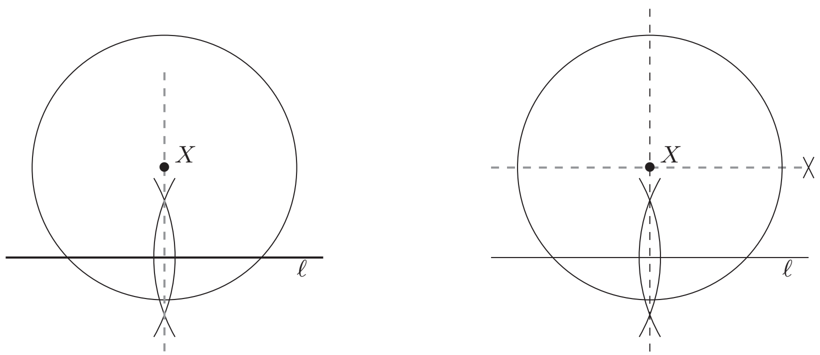
14. Konstrukcje geometryczne

W ramach teorii ciał, w XIX wieku wypracowane zostały metody pozwalające na rozstrzygnięcie problemów rozważanych przez starożytnych Greków i związanych z wykonalnością pewnych konstrukcji geometrycznych za pomocą dwóch przyrządów: cyrkla i linijki. Przypomnijmy trzy słynne problemy starożytnych Greków:

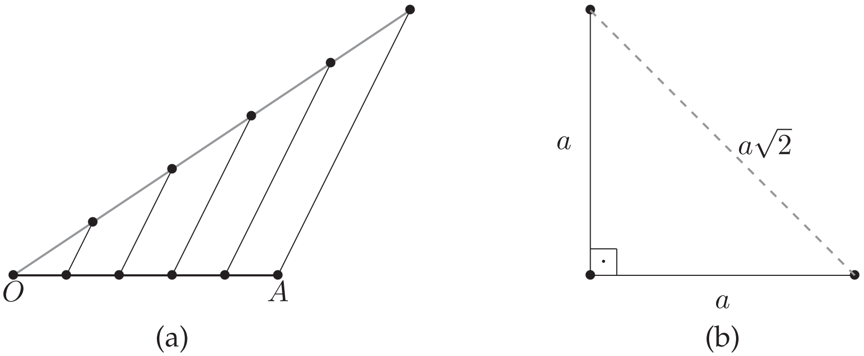
- *podwojenie sześcianu*, czyli konstrukcja boku sześcianu o objętości dwukrotnie większej od objętości danego sześcianu;
- *trysekcja kąta*, czyli podział danego kąta na trzy równe kąty;
- *kwadratura koła*, czyli konstrukcja kwadratu, którego pole jest równe polu danego koła.

Przedstawimy współczesne podejście do tych problemów. Pokażemy, że każdy z nich ma negatywne rozwiązanie. W tym celu ustalimy najpierw właściwy grunt dla rozważanych zagadnień. Interesować nas będą długości odcinków na płaszczyźnie, które można otrzymać konstrukcyjnie z odcinków o danych długościach. Rysunki 14.1 i 14.2 przedstawiają podział danego odcinka na dowolną ilość jednakowych części. Możemy więc otrzymać dowolną wymierną wielokrotność danej długości.
Na początek ustalmy, co będziemy rozumieli przez konstrukcję geometryczną. Załóżmy, że mamy dany odcinek na płaszczyźnie. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, że końce tego odcinka są w punktach $O = (0, 0)$ i $A = (1, 0)$.



(a) (b)

Rysunek 14.1. (a) Konstrukcja prostej prostopadłej do prostej ℓ i przechodzącej przez punkt X, (b) Konstrukcja prostej równoległej do prostej ℓ i przechodzącej przez punkt X



Rysunek 14.2. (a) Podział odcinka OA na $n = 5$ równych części, (b) Konstrukcja odcinka o długości $a\sqrt{2}$

Punkty płaszczyzny, które można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki z punktów O i A nazwiemy **konstruowalnymi**. Natomiast współrzędne punktów konstruowanych nazwiemy **liczbami konstruowalnymi**. Zwróćmy uwagę na to, że do wyznaczania punktów konstruowalnych dopuszczamy następujące czynności:

- narysowanie prostej przez dwa punkty wcześniej skonstruowane;
- narysowanie okręgu o środku w punkcie wcześniej skonstruowanym i promieniu równym odległości między dwoma punktami już skonstruowanymi;
- zaznaczenie punktów przecięcia narysowanych prostych lub okręgów.

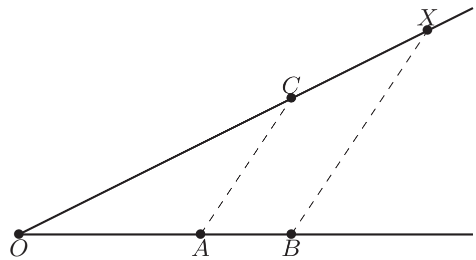
Zauważmy, że

Twierdzenie 14.1. *Zbiór K wszystkich liczb konstruowalnych jest podciałem ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. W szczególności, K jest rozszerzeniem ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.*

Dowód. Należy wykazać, że jeżeli $a, b \in K$, to $a \pm b \in K$, $a \in K$ oraz $\dfrac{a}{b} \in K$, o ile $b \neq 0$. Aby otrzymać to, że $a \pm b \in K$, wystarczy odłożyć odpowiednio na prostej odcinki o długościach a i b (jeden za drugim lub krótszy wewnątrz dłuższego). Niech teraz $a, b, c \in K$ i załóżmy, że są to liczby dodatnie.

Załóżmy, że $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$ i $|OX| = x$ (por. Rysunek 14.3). Z podobieństwa trójkątów OAC i OBX wynika, że

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{czyli} \quad x = \frac{bc}{a}.$$

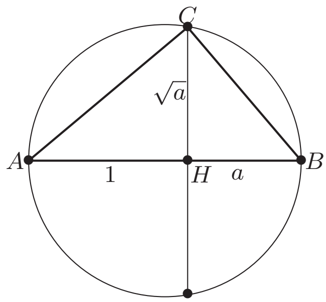


Rysunek 14.3. Konstrukcja liczby $\dfrac{bc}{a}$

Wynika stąd, że jeżeli $b, c \in K$, to kładąc $a = 1$, otrzymujemy $bc \in K$. Z kolei jeżeli $a, b \in K$, to kładąc $c = 1$, otrzymujemy $\dfrac{b}{a} \in K$. □

Wniosek 14.1. *Jeżeli $a > 0$ i $a \in K$, to $\sqrt{a} \in K$.*

Dowód. Narysujmy okrąg o średnicy AB długości $1 + a$ (Rysunek 14.4). Niech H oznacza spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej na przeciwprostokątną AB, takiego że



Rysunek 14.4. Konstrukcja liczby $\sqrt{a}$

$|AH| = 1$ oraz $|HB| = a$. Z podobieństwa trójkątów AHC i BHC wynika, że

$$\frac{|CH|}{|AH|} = \frac{|BH|}{|CH|}.$$

Stąd $|CH|^2 = 1 \cdot a$, czyli $|CH| = \sqrt{a}$. □

Twierdzenie 14.2. *Liczba a jest konstruowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg podciał ciała $\mathbb{R}$*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_{n-1} \subset K_n,$$

że $a \in K_n$ oraz $[K_i : K_{i-1}] = 2$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.