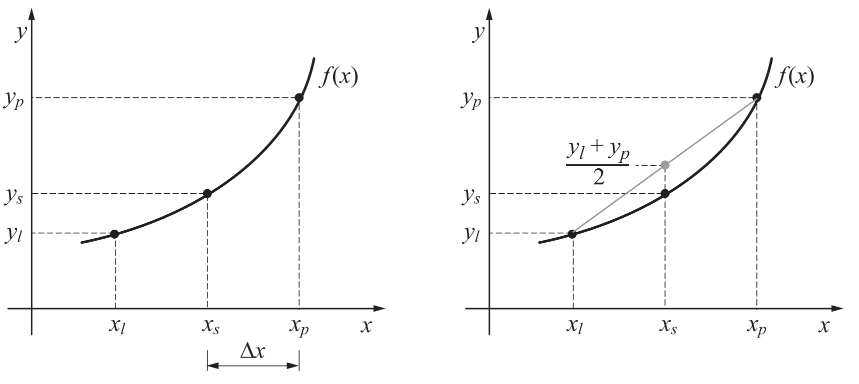

Rys. 3.3. Do numerycznego obliczania drugiej pochodnej

1. Opierając się na rozumowaniu z paragrafu 1.7 powiemy, że iloraz różnicowy $\frac{y_p - y_s}{\Delta x}$ jest w przybliżeniu równy pochodnej funkcji $y = f(x)$ dla współrzędnej odpowiadającej środkowi pomiędzy x_s a x_p, czyli dla $x = x_s + \frac{1}{2}\Delta x$. Zapiszemy to:

$$f'(x_s + \tfrac{1}{2}\Delta x) \approx \frac{y_p - y_s}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.24}$$

2. Rozumując podobnie, napiszemy:

$$f'(x_s - \tfrac{1}{2}\Delta x) \approx \frac{y_s - y_l}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}. \tag{3.25}$$

3. Druga pochodna w punkcie x_s jest równa w przybliżeniu ilorazowi różnicowemu wartości pierwszej pochodnej, odpowiadającej odległym o Δx punktom $x_s - \frac{1}{2}\Delta x$ i $x_s + \frac{1}{2}\Delta x$:

$$\begin{aligned} f''(x_s) &\approx \frac{f'(x_s + \frac{1}{2}\Delta x) - f'(x_s - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} \approx \\ &\approx \frac{\dfrac{f(x_s+\Delta x) - f(x_s)}{\Delta x} - \dfrac{f(x_s) - f(x_s-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{[f(x_s+\Delta x) - f(x_s)] - [f(x_s) - f(x_s-\Delta x)]}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{f(x_s+\Delta x) + f(x_s-\Delta x) - 2f(x_s)}{\Delta x^2}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Opuszczając nieistotny indeks s dostajemy ostatecznie[9]:

(3.27)
$$f''(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{\Delta x^2}.$$

Zauważmy:

1. Wyrażenie 3.27 jest dodatnie, kiedy średnia arytmetyczna y_l i y_p jest większa od y_s, czyli $\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)}{2} > f(x)$. Ma to miejsce wtedy, kiedy krzywa $y = f(x)$ „zakręca ku górze" (rys. 3.3).
2. Wyrażenie 3.27 jest ujemne, kiedy średnia arytmetyczna y_l i y_p jest mniejsza od y_s, czyli $\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)}{2} < f(x)$. Ma to miejsce wtedy, kiedy krzywa $y = f(x)$ „zakręca ku dołowi".

Wyrażenie 3.27 daje wynik ścisły dla funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ (patrz niżej).

Dwie pochodne funkcji potęgowej drugiego stopnia

Dla funkcji potęgowej drugiego stopnia, czyli o postaci

(3.28)
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

omówione wyżej procedury numeryczne dają wyniki **ścisłe**. Dla pierwszej pochodnej pokazaliśmy to rozdziale 1.

Dla drugiej pochodnej wzór 3.27 daje:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{\Delta x^2} =$$
$$= \frac{[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]+[a(x-\Delta x)^2+b(x-\Delta x)+c]-2(ax^2+bx+c)}{\Delta x^2} =$$

(3.29)
$$= \frac{(ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c)+(ax^2-2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx-b\Delta x+c)}{\Delta x^2} +$$
$$+\frac{-2ax^2-2bx-2c}{\Delta x^2} =$$
$$\frac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c+ax^2-2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx-b\Delta x+c}{\Delta x^2} +$$
$$+\frac{-2ax^2-2bx-2c}{\Delta x^2} = \frac{2a\Delta x^2}{\Delta x^2} = 2a.$$

[9] Bardziej eleganckie – ale mniej poglądowe – uzasadnienie tego wzoru znajduje się w paragrafie 7.12.