Dowód. Ze wzoru (1.14) otrzymujemy równość

$$X \setminus \operatorname{Bd} A = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A),$$

a więc $X \setminus \operatorname{Bd} A$ jest sumą dwóch rozłącznych niepustych zbiorów otwartych. To na mocy lematu 5.1.1 kończy dowód. □

Jak pokazuje twierdzenie 1.1.23, przestrzeń $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest przykładem przestrzeni spójnej. Przestrzenie spójne mogą być jednak dość osobliwe. Z definicji wynika, że każdy zbiór z topologią antydyskretną jest przestrzenią spójną. Spójna jest także przestrzeń opisana w przykładzie 1.1.21. Zbiorami otwartymi w tej przestrzeni są, oprócz zbioru pustego, elementy filtru wolnego. Szczególnym przypadkiem jest przestrzeń z topologią koskończoną. Jest to taka przestrzeń nieskończona, w której jedynymi zbiorami otwartymi są te, które mają dopełnienia skończone. Taka przestrzeń jest typu T_1. Istnieją więc przestrzenie spójne typu T_1 dowolnej mocy, w szczególności przeliczalne. Jeśli jednak zażądamy, by przestrzeń spójna była dodatkowo regularna, to nie może ona być przeliczalna, bo regularne przestrzenie przeliczalne są normalne (p. twierdzenie 1.8.18), czyli są przestrzeniami Tichonowa, a przestrzenie spójne mają następującą własność.

Lemat 5.1.3. *Każda przestrzeń Tichonowa spójna niejednopunktowa ma moc co najmniej* 2^ω.

Dowód. Załóżmy, że przestrzeń Tichonowa X jest spójna i wybierzmy punkty $x, y \in X$. Istnieje taka funkcja ciągła $f\colon X \to [0,1]$, że $f(x) = 0$, a $f(y) = 1$. Ponieważ na mocy wniosku 1.3.12 $f[X] = [0,1]$, to $|X| \geq 2^\omega$. □

Powstaje naturalne pytanie, czy przestrzeń spójna przeliczalna może być przestrzenią Hausdorffa. Jak pokazał Urysohn [501], a nieco później Bing [58], konstruując odpowiedni przykład (p. Engelking [153], przykład 6.1.6), odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Przedstawiamy tu przykład Golomba [192] topologii Hausdorffa spójnej na zbiorze liczb naturalnych. Przestrzeń Golomba jest modyfikacją konstrukcji Furstenberga (patrz str. 5) topologii zerowymiarowej na zbiorze $\mathbb{Z}$; patrz str. 11.

Przykład 5.1.4 (topologia Golomba). Topologia Golomba określona jest na zbiorze $\mathbb{N}$ liczb naturalnych i jest generowana przez zbiory postaci

$$a + b\mathbb{N} = \{a + nb\colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

przy czym zakładamy dodatkowo, że liczby a i b są względnie pierwsze, tzn. takie, że największy wspólny dzielnik $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$. A zatem **topologia Golomba** na zbiorze $\mathbb{N}$ jest generowana przez rodzinę

$$\mathcal{B} = \{a + b\mathbb{N}\colon a, b \in \mathbb{N} \text{ oraz } \mathrm{NWD}(a,b) = 1\}.$$

Rodzina $\mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$ jest zamknięta ze względu na skończone przekroje. Wystarczy zauważyć, że jeśli $x = \min((a + b\mathbb{N}) \cap (a' + b'\mathbb{N}))$, to

$$(a + b\mathbb{N}) \cap (a' + b'\mathbb{N}) = x + c\mathbb{N}, \qquad (*)$$

przy czym c jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb b i b'. Faktycznie, ponieważ istnieją takie $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$, że $x = a + n_0 b = a' + m_0 b'$, to dla każdego $x + nc \in x + c\mathbb{N}$ mamy $x + nc = a + n_0 b + nc \in a + b\mathbb{N}$, bo c jest wielokrotnością b, a zatem $x + c\mathbb{N} \subseteq a + b\mathbb{N}$. Podobnie $x + c\mathbb{N} \subseteq a' + b'\mathbb{N}$. Z tego wynika, że $x + c\mathbb{N} \subseteq (a + b\mathbb{N}) \cap (a' + b'\mathbb{N})$. Jednocześnie, jeśli $y \in (a + b\mathbb{N}) \cap (a' + b'\mathbb{N})$, to istnieją takie $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, że $y = a + n_1 b = a' + m_1 b'$. Wówczas dostajemy $y - x = (n_1 - n_0)b$ i podobnie $y - x = (m_1 - m_0)b'$. A zatem $y - x$ jest wspólną wielokrotnością b i b', a więc istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $y - x = kc$. Z tego wynika, że $y \in x + c\mathbb{N}$, a to dowodzi warunku $(*)$. Z warunku tego wynika, że rodzina $\mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$ jest domknięta ze względu na skończone przekroje, a więc jest bazą topologii Golomba, bo każda liczba naturalna należy do pewnego elementu rodziny $\mathcal{B}$.

Stąd, że rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą wynika w szczególności, że przestrzeń Golomba spełnia warunek Hausdorffa. Wystarczy bowiem dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{N}$, gdzie $y > x$, wybrać liczbę pierwszą[1] $p > y - x$. Wówczas $x + p\mathbb{N}$ i $y + p\mathbb{N}$ są otoczeniami rozłącznymi odpowiednio punktów x i y. Faktycznie, gdyby $x + pn = y + pm$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$, to mielibyśmy $y - x = (n - m)p$, co daje sprzeczność, bo $0 < y - x < p$.

Aby wykazać, że zbiór $\mathbb{N}$ z topologią Golomba jest przestrzenią spójną, przypuśćmy, że $\mathbb{N} = U \cup V$, przy czym U i V są niepustymi zbiorami otwartymi i rozłącznymi. Weźmy dowolny zbiór $x + a\mathbb{N} \in \mathcal{B}$ zawarty w U. Wykażemy, że $a\mathbb{N} \subseteq U$. W przeciwnym razie istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $an \in V$, a ponieważ zbiór V jest otwarty, to dla pewnego $y + b\mathbb{N} \in \mathcal{B}$ dostajemy $an \in y + b\mathbb{N} \subseteq V$. Stąd wynika, że $an = y + bm$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, a ponieważ zachodzi $\mathrm{NWD}(y, b) = 1$, to także $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. Wówczas na mocy twierdzenia chińskiego o resztach[2] dostajemy $(x + a\mathbb{N}) \cap (y + b\mathbb{N}) \neq \emptyset$, co daje sprzeczność, bo zbiory U i V są rozłączne, z zatem $a\mathbb{N} \subseteq U$. Rozumując analogicznie, stwierdzamy, że skoro dla pewnego $y + b\mathbb{N} \in \mathcal{B}$ zachodzi $y + b\mathbb{N} \subseteq V$, to także $b\mathbb{N} \subseteq V$. Ale wówczas $ab\mathbb{N} \subseteq U \cap V$, co daje sprzeczność, bo $U \cap V = \emptyset$. ♢

Opiszemy teraz pewne standardowe metody konstruowania przestrzeni spójnych. Jak wiemy (p. twierdzenie 1.3.11) funkcje ciągłe zachowują spójność, a więc nowe przestrzenie spójne można tworzyć, jak już pokazano na str. 56 pisząc o okręgu, za pomocą operacji ilorazowania. Przedstawimy teraz inne jeszcze sposoby konstruowania przestrzeni spójnych. Przypomnijmy, że podzbiór A przestrzeni X jest zbiorem spójnym, gdy jako podprzestrzeń

---

[1] Z konstrukcji Golomba, podobnie jak z konstrukcji Furstenberga, wynika, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Wynika to z tego, że dla każdego $p \in \mathbb{N}$ zbiór $p\mathbb{N}$ jest domknięty, bo jego dopełnieniem jest zbiór $(1 + p\mathbb{N}) \cup \ldots \cup ((p-1) + p\mathbb{N})$. Gdyby więc liczb pierwszych było skończenie wiele, to zbiór $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ byłby domknięty, a to w topologii Golomba nie jest możliwe.

[2] Twierdzenie chińskie o resztach mówi w szczególności, że jeśli liczby $a, b \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze, to kongruencje $z \equiv x (\mathrm{mod}\ a)$ oraz $z \equiv y (\mathrm{mod}\ b)$ mają wspólne rozwiązanie $z \in \mathbb{N}$; p. na przykład Marzantowicz i Zarzycki [328]. Faktycznie, ponieważ a i b są względnie pierwsze, to istnieją takie $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, że $\alpha a + \beta b = 1$. Wystarczy przyjąć $z = \alpha y a + \beta x b + nab$, gdzie n jest dostatecznie duże.