20

Aplikacja druga F

Nałożymy na obiekty proceduralną **teksturę odkształceń**; zaburzanie wektora normalnego powierzchni przekazywanego do obliczeń z ustalonym modelem oświetlenia umożliwia otrzymanie obrazu powierzchni chropowatej, porysowanej, pofalowanej albo na przykład pokrytej łuskami lub dachówkami. Osiągnięcie takich efektów przy użyciu dokładnego opisu kształtu (przez wygenerowanie tablicy z wierzchołkami wszystkich wypukłości i wnęk powierzchni) byłoby skrajnie niepraktyczne. Studiowanie lepszej metody rozwiązania problemu zaczniemy od zaaplikowania sobie homeopatycznej dawki geometrii różniczkowej.

20.1. Wektor normalny zaburzonej powierzchni

Rozważamy płat powierzchni parametrycznej, o parametryzacji $\boldsymbol{p}\colon A \to \mathbb{R}^3$ (w naszej aplikacji będzie to każdy z płatów Béziera, jego dziedzina A jest kwadratem jednostkowym $[0,1]^2$). **Odwzorowanie Gaussa**[1] jest to funkcja wektorowa, która każdemu punktowi $(u,v) \in A$ przyporządkowuje jednostkowy wektor normalny płata $\boldsymbol{p}$ w punkcie $\boldsymbol{p}(u,v)$. Jest ono dane wzorem

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{\boldsymbol{m}(u,v)}{\|\boldsymbol{m}(u,v)\|}, \quad \boldsymbol{m}(u,v) = \boldsymbol{p}_u(u,v) \wedge \boldsymbol{p}_v(u,v),$$

przy czym zakładamy, że wektory pochodnych cząstkowych $\boldsymbol{p}_u(u,v)$ i $\boldsymbol{p}_v(u,v)$ są liniowo niezależne. Wprowadzimy teraz przekształcenie $\boldsymbol{q}$ dziedziny A w pewien obszar w $\mathbb{R}^2$ i określoną w tym obszarze funkcję d, która przyjmuje wartości rzeczywiste o *małych* wartościach bezwzględnych. Zakładamy, że przekształcenie $\boldsymbol{q}$ i funkcja d są ciągłe i mają (kawałkami) ciągłe pochodne.

Określimy teraz parametryzację *nowej powierzchni* wzorem

$$\hat{\boldsymbol{p}}(u,v) = \boldsymbol{p}(u,v) + d\big(\boldsymbol{q}(u,v)\big)\boldsymbol{n}(u,v),$$

[1]Nie ma się czego bać: już od dawna korzystamy z tego odwzorowania, rysując oświetlony czajnik.

który możemy zapisać krócej w postaci $\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + (d \circ \boldsymbol{q})\boldsymbol{n}$. Nowa powierzchnia powstaje z powierzchni oryginalnej przez przesunięcie każdego punktu w kierunku wektora normalnego, przy czym wielkość tego przesunięcia jest wartością funkcji d. Użycie tekstury odkształceń polega na narysowaniu oryginalnej powierzchni, ale do modelu oświetlenia podstawia się wektor normalny $\hat{\boldsymbol{n}}$ płata $\hat{\boldsymbol{p}}$. Jeśli przemieszczenia (czyli wartości funkcji d) są małe (w porównaniu z rozmiarami powierzchni), to otrzymany obraz bardzo trudno jest odróżnić od obrazu powierzchni $\hat{\boldsymbol{p}}$.

Znajdziemy wzory umożliwiające obliczenie wektora normalnego $\hat{\boldsymbol{n}}$. W tym celu potrzebujemy pochodnych cząstkowych parametryzacji $\hat{\boldsymbol{p}}$, które są kolumnami jej macierzy różniczki $\mathrm{D}\hat{\boldsymbol{p}}$. Obliczanie pochodnych sumy, iloczynu i złożenia funkcji wektorowych daje się wygodnie zapisać w postaci macierzowej, w której mamy

$$\mathrm{D}\hat{\boldsymbol{p}} = \mathrm{D}\boldsymbol{p} + \mathrm{D}(d \circ \boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{n} + (d \circ \boldsymbol{q})\mathrm{D}\boldsymbol{n} \approx \mathrm{D}\boldsymbol{p} + (\mathrm{D}d \cdot \mathrm{D}\boldsymbol{q})\boldsymbol{n}.$$

W ostatnim kroku powyższego rachunku pominęliśmy składnik $(d \circ \boldsymbol{q})\mathrm{D}\boldsymbol{n}$, ponieważ jest w nim czynnik d; dzięki założeniu, że funkcja d ma małe wartości bezwzględne, ten składnik istotnie jest pomijalny[2]. Do końcowego wzoru potrzebujemy zatem podstawić macierz $\mathrm{D}\boldsymbol{p}$, której kolumny są pochodnymi cząstkowymi parametryzacji $\boldsymbol{p}$, macierz (wierszową) $\mathrm{D}d$, która jest gradientem funkcji d, macierz różniczki $\mathrm{D}\boldsymbol{q}$ przekształcenia $\boldsymbol{q}$ i wektor normalny $\boldsymbol{n}$ płata $\boldsymbol{p}$. Po obliczeniu macierzy $\mathrm{D}\hat{\boldsymbol{p}}$ wystarczy obliczyć iloczyn wektorowy jej kolumn i po unormowaniu tego iloczynu mamy wektor $\hat{\boldsymbol{n}}$.

Przyjmiemy, że przekształcenie $\boldsymbol{q}$ jest afiniczne; niech $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{u}) = L\boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}$. Niech $d(\boldsymbol{s}) = \tilde{d}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s})\big)$, gdzie $\tilde{d}$ jest funkcją określoną w prostokącie $B = [a, b) \times [c, d)$, a funkcja $\boldsymbol{f}$ sprowadza punkt $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^2$ do prostokąta B, co polega na obliczeniu wektora

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{u} + \big(k(b-a), l(d-c)\big)$$

z odpowiednio dobranymi liczbami *całkowitymi* k, l. Dzięki temu złożenie funkcji $d \circ \boldsymbol{q} = \tilde{d} \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{q}$ jest funkcją podwójnie okresową w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ zawierającej dziedzinę A rysowanego płata. Wypada zadbać o to, aby była to funkcja ciągła; w tym celu wystarczy wybrać taką funkcję $\tilde{d}$, której obcięcia do przeciwległych boków prostokąta B są identyczne.

Rola przekształcenia $\boldsymbol{q}$ polega na skalowaniu wzorca zaburzeń kształtu, jaki pojawi się na obrazie powierzchni. Średnica zaburzeń maleje ze wzrostem wartości własnych macierzy L, a jeśli one znacznie się różnią, to otrzymujemy efekt anizotropii. Dobierając współczynniki macierzy L, trzeba zapewnić ciągłość sklejenia funkcji $d \circ \boldsymbol{q}$ na wspólnym brzegu połączonych płatów[3]. Macierzą różniczki $\mathrm{D}\boldsymbol{q}$ jest macierz L.

Pozostało wybrać konkretną funkcję $\tilde{d}$ i znaleźć sposób obliczania jej pochodnych cząstkowych (sama wartość funkcji jest nam niepotrzebna). Na początek eksperymentów proponuję dwie funkcje; potem Czytelnik może im wymyślać swoje zamienniki. Moje propozycje

[2] Poza tym różniczka odwzorowania Gaussa, $\mathrm{D}\boldsymbol{n}$, jest opisana przez pochodne drugiego rzędu parametryzacji $\boldsymbol{p}$. Nie chcemy się z nimi kłopotać.

[3] Jeśli to wyjaśnienie jest niezrozumiałe, to proszę poeksperymentować, zmieniając współczynniki tej macierzy i pooglądać wyniki eksperymentów. Jeśli jest zrozumiałe, to też proszę poeksperymentować.