Całkując pierwsze trzy z powyższych równań, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u &= \frac{N}{EA}\int dx + c_x = \frac{Nx}{EA} + c_x \\ v &= -\nu\frac{N}{EA}\int dy + c_y = -\nu\frac{Ny}{EA} + c_y \\ w &= -\nu\frac{N}{EA}\int dz + c_z = -\nu\frac{Nz}{EA} + c_z \end{aligned} \tag{5.17}$$

gdzie c_x, c_y, c_z są stałymi całkowania.

W miejscu utwierdzenia pręta wszystkie współrzędne wektora przemieszczenia są równe zeru, czyli $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0$. Podstawiając zatem w powyższych zależnościach $x = y = z = 0$ oraz wykorzystując warunki brzegowe (4.34), otrzymujemy następujące wartości stałych całkowania:

$$u(0) = c_x = 0, \quad v(0) = c_y = 0, \quad w(0) = c_z = 0 \tag{5.18}$$

Wykorzystując powyższe stałe w relacjach (5.17), dostajemy zależności:

$$u = \frac{Nx}{EA}, \quad v = -\nu\frac{Ny}{EA}, \quad w = -\nu\frac{Nz}{EA} \tag{5.19}$$

określające współrzędne wektora przemieszczenia przy prostym rozciąganiu.

Z powyższych zależności wynika, że

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{5.20}$$

a zatem równania geometryczne $(4.30)_{2,4,6}$ są spełnione tożsamościowo.

Ponieważ wyznaczone naprężenia (5.14), odkształcenia (5.15) i przemieszczenia (5.19) spełniają wszystkie równania i warunki brzegowe, to otrzymane ***rozwiązanie*** zagadnienia prostego rozciągania jest ***ścisłe*** (***dokładne***).

Ze wzoru $(5.19)_1$ wynika, iż ***przemieszczenie*** $u(x)$ dowolnego przekroju pręta rozciąganego obciążonego siłą skupioną jest ***funkcją liniową***, a jego ***wydłużenie*** Δl jest równe przemieszczeniu końca pręta $u(l)$ i wynosi

$$\Delta l = u(l) = u_{\max} = \frac{Nl}{EA} \tag{5.21}$$

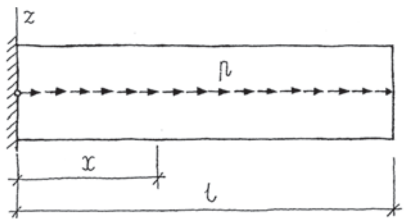
Z porównania wzorów (5.15) i (5.21) wynika, że

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \tag{5.22}$$

Należy podkreślić, że z uwagi na spełnienie zasady DE SAINT-VENANTA wzory (5.14), (5.15), (5.19), (5.21) i (5.22) pozostają ważne również w przypadku innego, statycznie równoważnego obciążenia pręta.

5.6. Obciążenie równomiernie rozłożone

W przypadku przyłożenia do pręta obciążenia p równomiernie rozłożonego po jego długości (rys. 5.4) siła podłużna jest liniową funkcją położenia, czyli $N(x) = p(l - x)$.



Rys. 5.4.

W takim przypadku we wzorach (5.14) i (5.15) siłę N należy zastąpić siłą podłużną $N(x) = p(l - x)$. Otrzymamy wtedy zależności pozwalające obliczyć naprężenia

$$\sigma_x(x) = \frac{p}{A}(l - x) \tag{5.23}$$

oraz odkształcenia

$$\varepsilon_x(x) = \frac{p}{EA}(l - x) \tag{5.24}$$

w pręcie obciążonym równomiernie po swojej długości.

W celu obliczenia przemieszczenia $u(x)$ punktów leżących na osi podłużnej takiego pręta w równaniu $(5.16)_1$ siłę N należy zastąpić siłą podłużną $N(x) = p(l - x)$. W takim przypadku równanie to przyjmie postać

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p}{EA}(l - x) \tag{5.25}$$