14

Druga aplikacja

Druga aplikacja rysuje powierzchnie zakrzywione zbudowane z płatów Béziera. Dla odmiany i poszerzenia horyzontów jest to aplikacja biblioteki GLFW. Wykorzystamy w niej wiele procedur z pierwszej aplikacji, bez żadnych zmian lub ze zmianami wymuszonymi przez inny interfejs aplikacji (API) tej biblioteki. Ale to nie są wielkie zmiany.

14.1. Płaty powierzchni Béziera

O binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo.
O que há é pouca gente para dar por isso.[1]

Fernando Pessoa

Opis reprezentacji Béziera wielomianowych płatów parametrycznych i jej własności można znaleźć w książkach na ten temat, na przykład w mojej [25]. Matematyka będąca podstawą tej reprezentacji może wystraszyć wiele osób[2], więc nie przedstawiam tu jej zbyt szczegółowo, jednak bez tej matematyki nie ma mowy o eleganckich i efektywnych algorytmach umożliwiających wykonywanie obrazów takich płatów i w będących w moim posiadaniu książkach o OpenGL-u nie takie algorytmy są opisane. Poniższy (zgniły) kompromis wystarczy do przedstawienia algorytmów, których użyjemy, a Czytelników zachęcam do dowiedzenia się więcej z innych źródeł.

Podstawą reprezentacji Béziera krzywych i płatów parametrycznych są **wielomiany bazowe Bernsteina**, określone wzorem

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{14.1}$$

Krzywą Béziera stopnia n określa się wzorem

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i B_i^n(t), \quad t \in [a, b]. \tag{14.2}$$

[1] Dwumian Newtona jest równie piękny jak Wenus z Milo. Jak niewielu ludzi zdaje sobie z tego sprawę.

[2] nad czym głęboko ubolewam

Odcinek (przedział) $[a, b]$ osi liczbowej jest **dziedziną parametryzacji $\boldsymbol{p}$**. Każdej liczbie t z tego przedziału odpowiada pewien punkt $\boldsymbol{p}(t)$ krzywej. Krzywa ta znajduje się w przestrzeni, do której należą tzw. **punkty kontrolne** $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ jest spełniona równość $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$, dzięki czemu każdy punkt $\boldsymbol{p}(t)$ jest kombinacją afiniczną punktów kontrolnych krzywej.

Przedział $[a, b]$ może być wybrany dowolnie, ale zazwyczaj przyjmuje się, że jest to przedział $[0, 1]$. Wszystkie wielomiany Bernsteina przyjmują w nim wartości nieujemne, co w powiązaniu z faktem, że ich suma dla każdego t jest równa 1, sprawia, że jeśli $[a, b] = [0, 1]$, to krzywa jest położona w **otoczce wypukłej** zbioru swoich punktów kontrolnych.

Łamana kontrolna składa się z n odcinków, a jej kolejnymi wierzchołkami są punkty $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n$. Jest ona przybliżeniem krzywej Béziera; ponieważ $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}_0$ oraz $\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}_n$, punktami końcowymi krzywej są pierwszy i ostatni wierzchołek łamanej kontrolnej. Jeśli f oznacza dowolne przekształcenie afiniczne, to obraz $f(\boldsymbol{p})$ krzywej $\boldsymbol{p}$ jest reprezentowany przez punkty kontrolne $f(\boldsymbol{p}_0), \ldots, f(\boldsymbol{p}_n)$. Zatem, aby poddać krzywą Béziera dowolnemu przekształceniu afinicznemu (np. obrócić ją lub przesunąć), wystarczy zastosować to przekształcenie do jej punktów kontrolnych.

Tensorowy płat Béziera stopnia (n, m) jest określony wzorem

$$\boldsymbol{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \boldsymbol{p}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v), \qquad u \in [a, b],\ v \in [c, d]. \tag{14.3}$$

Dziedziną parametryzacji płata jest zatem prostokąt $[a, b] \times [c, d]$, przy czym zazwyczaj przyjmuje się, że $a = c = 0$, $b = d = 1$, a wtedy dziedzina ta jest kwadratem jednostkowym, $[0, 1]^2$. Krzywą można widzieć jako powyginany i porozciągany odcinek i podobnie płat tensorowy jest powyginanym i porozciąganym kwadratem.

W zbiorze **punktów kontrolnych płata**, $\boldsymbol{p}_{ij}$, wyróżniamy $n + 1$ **kolumn** (ciągów $\boldsymbol{p}_{i0}, \ldots, \boldsymbol{p}_{im}$) oraz $m + 1$ **wierszy** (ciągów $\boldsymbol{p}_{0j}, \ldots, \boldsymbol{p}_{nj}$), które wygodnie jest przedstawiać jako łamane. W ten sposób powstaje **siatka kontrolna** — odpowiednik łamanej kontrolnej krzywej. Jej kształt określa kształt płata. Podobnie jak dla krzywej, aby otrzymać obraz płata Béziera w dowolnym przekształceniu afinicznym, wystarczy przekształcić jego siatkę kontrolną.

Wzór definiujący płat możemy przepisać w postaci

$$\boldsymbol{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} \boldsymbol{p}_{ij} B_j^m(v) \right)}_{\boldsymbol{q}_i} B_i^n(u) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{q}_i B_i^n(u). \tag{14.4}$$

Wynika z niej, że mając dane liczby u, v, możemy obliczyć $n+1$ punktów, $\boldsymbol{q}_0, \ldots, \boldsymbol{q}_n$, z których każdy jest punktem krzywej Béziera stopnia m reprezentowanej przez odpowiednią kolumnę siatki kontrolnej. Otrzymamy w ten sposób **krzywą stałego parametru** v płata; punkt $\boldsymbol{p}(u, v)$ płata jest punktem tej krzywej, odpowiadającym danemu u.[3]

[3] Alternatywnie, zamiast kolumn możemy potraktować *wiersze* siatki kontrolnej jak łamane kontrolne krzywych Béziera stopnia n; otrzymamy w ten sposób reprezentację Béziera krzywej stałego parametru u płata i możemy obliczać punkty płata jako punkty tej krzywej.