Przykład 2.1.1 (przestrzenie euklidesowe). **Metryka euklidesowa** w $\mathbb{R}^n$ jest dla dowolnych $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ określona wzorem

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

Warunek identyczności, a także warunek symetrii, jest spełniony w sposób oczywisty. W celu sprawdzenia warunku trójkąta weźmy dodatkowo element $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$. Dla każdego $i \leq n$ ustalmy $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ oraz $c_i = x_i - z_i$. Wtedy $c_i = a_i + b_i$, a więc na mocy warunku (2.1) mamy

$$\begin{aligned}(d(\mathbf{x}, \mathbf{z}))^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \\ &= (d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}))^2,\end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności trójkąta. Zgodnie z definicją, odległość między punktami w przestrzeni euklidesowej jest równa długości odcinka łączącego te punkty. Dla $n = 2$ wzór (2.2) jest w istocie twierdzeniem Pitagorasa. $\diamondsuit$

Wzór na metrykę w iloczynie kartezjańskim prostych rzeczywistych można uogólnić na dowolne przestrzenie metryczne.

Definicja 2.1.2 (metryka w iloczynie kartezjańskim). *Niech dla każdego $i \leq n$ dana będzie przestrzeń metryczna (X_i, d_i). Metrykę w iloczynie kartezjańskim $X_1 \times \ldots \times X_n$ określamy wzorem*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ oraz $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_1 \times \ldots \times X_n$, i nazywamy **metryką kartezjańską**.

Funkcja dana wzorem (2.3) spełnia postulaty metryki. Warunek trójkąta dowodzi się za pomocą nierówności (2.1) analogicznie jak w przykładzie 2.1.1 w przypadku metryki euklidesowej. Każda metryka wyznacza topologię (p. twierdzenie 1.2.3), a więc w iloczynie kartezjańskim $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ mamy topologię wyznaczoną przez metrykę d daną wzorem (2.3). Jednocześnie mamy tam też topologię iloczynu kartezjańskiego wyznaczoną przez topologie generowane przez metryki w przestrzeniach X_i; p. definicja 1.5.1. Okazuje się, że są to te same topologie. Zanim to sprawdzimy, przeanalizujemy zbieżność w iloczynie kartezjańskim przestrzeni metrycznych. Ponieważ (X, d) jest przestrzenią metryczną, to dla każdego ciągu $(\mathbf{x}^n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ i punktu $\mathbf{x}^0 \in X$ zachodzi równoważność: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathbf{x}^n, \mathbf{x}^0) = 0$; p. lemat 1.2.37.

Lemat 2.1.3. *Jeśli $(\mathbf{x}^m)_{m=1}^{\infty} \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$, gdzie (X_i, d_i) dla $i \le n$ jest przestrzenią metryczną oraz $\mathbf{x}^0 \in X_1 \times \ldots \times X_n$, to $\lim\limits_{m\to\infty} d(\mathbf{x}^m, \mathbf{x}^0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{m\to\infty} d(x_i^m, x_i^0) = 0$ dla każdego $i \le n$, przy czym x_i^m oznacza i-tą współrzędną punktu $\mathbf{x}^m$, a x_i^0 i-tą współrzędną punktu $\mathbf{x}^0$.*

Dowód. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że dla dowolnych punktów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_1 \times \ldots \times X_n$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ oraz $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, i dla dowolnego $i \le n$ zachodzą następujące nierówności

$$d_i(x_i, y_i) \le d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i). \tag{2.4}$$

Aby te nierówności uzasadnić, wystarczy zauważyć, że dla dowolnych liczb nieujemnych $a_1, \ldots, a_n$ oraz $i \le n$ zachodzą nierówności

$$a_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{2.5}$$

Pozostaje zastosować definicję metryki d, tzn. warunek (2.3). □

Wniosek 2.1.4. *Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, a w $X \times X$ określona jest topologia iloczynu kartezjańskiego, to $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Na mocy kryterium Heinego (patrz str. 34) wystarczy pokazać, że jeśli $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X \times X$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, to

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0).$$

Z lematu 2.1.3 mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y_0) = 0$. Jednocześnie z warunku trójkąta dostajemy

$$d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0) \le d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0)$$

i analogicznie

$$d(x_0, y_0) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0),$$

a więc $0 \le |d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \le d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0)$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| = 0$, co kończy dowód. □

Okazuje się, że różne metryki mogą generować tę samą topologię.

Definicja 2.1.5 (metryki równoważne). *Metryki są równoważne, gdy topologie przez nie wyznaczone są równe.*

Praktyczne kryterium równoważności metryk daje następny lemat.

LEMAT 2.1.6. *Metryki ρ i σ na zbiorze X są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ i każdego punktu $x \in X$ zachodzi równoważność*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0. \qquad (*)$$

DOWÓD. Symbolami $\mathcal{T}_\rho$ oraz $\mathcal{T}_\sigma$ oznaczmy topologie wyznaczone odpowiednio przez ρ oraz σ. Załóżmy warunek $(*)$. Aby wykazać równość $\mathcal{T}_\rho = \mathcal{T}_\sigma$, wystarczy sprawdzić, że dla każdego zbioru $A \subseteq X$ jego domknięcia w obydwu topologiach są takie same. Jeśli $x \in \operatorname{cl} A$, gdzie domknięcie rozumiane jest w sensie topologii $\mathcal{T}_\rho$, to na mocy drugiej części lematu 1.2.33 i lematu 1.2.37 istnieje taki ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, że $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Wówczas, na mocy warunku $(*)$ dostajemy $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0$. To zaś oznacza, że $x \in \operatorname{cl} A$, gdzie domknięcie rozumiane jest w sensie topologii $\mathcal{T}_\sigma$. Aby wykazać implikację odwrotną, wystarczy ponownie zastosować lemat 1.2.37 i skorzystać bezpośrednio z definicji zbieżności ciągu ze str. 28. □

Na mocy lematu 2.1.3 dla każdego ciągu $(\mathbf{x}^m)_{m=1}^{\infty} \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$ mamy $\lim_{m\to\infty} d(\mathbf{x}^m, \mathbf{x}^0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{m\to\infty} d_i(x_i^m, x_i^0) = 0$ dla każdego $i \le n$. Z lematu 2.1.6 wynika więc następujący wniosek.

WNIOSEK 2.1.7. *Metryka w iloczynie kartezjańskim $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ przestrzeni metrycznych (X_i, d_i), $i \le n$, określona dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ wzorem*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), \qquad (2.6)$$

przy czym $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, jest równoważna metryce kartezjańskiej.

W przypadku płaszczyzny metryka (2.6) wyraża się wzorem

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ i nazywana jest **metryką miejską**[2], bo w miastach realną odległość między punktami liczy się długością odcinków ulic łączących te punkty, a one przecinają się zwykle pod kątem prostym.

TWIERDZENIE 2.1.8. *Topologia iloczynu kartezjańskiego przestrzeni metryzowalnych pokrywa się z topologią wyznaczoną przez metrykę produktową.*

DOWÓD. Niech $\mathcal{T}_M$ oznacza topologię wyznaczoną przez metrykę zadaną wzorem (2.3), a $\mathcal{T}_K$ topologię iloczynu kartezjańskiego przestrzeni topologicznych $X_1, \ldots, X_n$, przy czym topologie w X_i wyznaczone są przez metryki d_i dla $i \le n$. Dla każdego $i \le n$ niech $\mathrm{pr}_i \colon X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ będzie rzutowaniem, tzn. $\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Z kryterium Heinego (patrz str. 34)

[2] W literaturze anglojęzycznej używany jest też termin *Manhattan distance* ze względu na układ ulic w tej części Nowego Jorku.

i lematu 2.1.3 wynika, że rzutowania są ciągłe w sensie topologii $\mathcal{T}_M$, a w konsekwencji każdy zbiór otwarty w sensie topologii $\mathcal{T}_K$ jest otwarty w sensie topologii $\mathcal{T}_M$. Aby wykazać implikację odwrotną, ustalmy kulę otwartą w sensie metryki d zadanej wzorem (2.6), tzn. zbiór

$$B_d(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in X_1, \ldots, X_n \colon d_1(x_1, y_1) + \ldots + d_n(x_n, y_n) < \varepsilon\},$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ oraz $\varepsilon > 0$ są dowolnie ustalone. Wówczas zbiór

$$U = B_{d_1}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{n}\right) \times \ldots \times B_{d_n}\left(x_n, \frac{\varepsilon}{n}\right)$$

jest otwarty w sensie topologii $\mathcal{T}_K$ oraz $\mathbf{x} \in U \subseteq B_d(\mathbf{x}, \varepsilon)$. To kończy dowód, bo na mocy wniosku 2.1.7 topologia zadana przez metrykę określoną wzorem (2.6) jest identyczna z topologią $\mathcal{T}_M$. □

Wniosek 2.1.9. *Iloczyn kartezjański skończenie wielu przestrzeni metryzowalnych jest przestrzenią metryzowalną.*

Dalszym wnioskiem jest następujące twierdzenie Frécheta [168] z 1910 r.

Twierdzenie 2.1.10. *Jeśli przestrzeń przeliczalna jest metryzowalna, to jest homeomorficzna z podprzestrzenią domkniętą przestrzeni liczb wymiernych.*

Dowód. Jeśli X jest przeliczalną przestrzenią metryzowalną, to na mocy wniosku 2.1.9 przestrzeń $X \times \mathbb{Q}$ także jest przeliczalną przestrzenią metryzowalną. Jest też przestrzenią w sobie gęstą, bo $\mathbb{Q}$ jest w sobie gęste. Stąd na mocy twierdzenia Sierpińskiego (twierdzenie 1.9.12) przestrzeń $X \times \mathbb{Q}$ jest homeomorficzna z $\mathbb{Q}$. Pozostaje zauważyć, że X jest homeomorficzne z podprzestrzenią domkniętą $X \times \{0\}$ przestrzeni $X \times \mathbb{Q}$. □

Ponieważ przestrzeń $\mathbb{Q}$ ma bazę przeliczalną, to rodzina wszystkich jej podzbiorów otwartych ma moc continuum. A zatem także rodzina wszystkich jej podzbiorów domkniętych ma moc continuum, bo dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym. Stąd i z twierdzenia 2.1.10 wynika, że moc rodziny wszystkich różnych, czyli parami niehomeomorficznych, przestrzeni przeliczalnych metryzowalnych jest równa continuum.

W wielu konstrukcjach topologicznych ważną rolę odgrywa fakt, że każda metryka jest równoważna pewnej metryce ograniczonej.

Definicja 2.1.11 (metryka ograniczona). *Metryka d w przestrzeni X jest* **ograniczona**, *gdy istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że $d(x, y) \leq a$ dla dowolnych $x, y \in X$. Mówimy wtedy, że metryka d jest* **ograniczona przez stałą** *a.*

Kolejny lemat podaje dwa sposoby tworzenia metryk ograniczonych.

Lemat 2.1.12. *Jeśli funkcja $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ jest metryką na X, to także funkcje $\sigma, \rho \colon X \times X \to X$ dane wzorami*

$$\sigma(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{oraz} \quad \rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

są metrykami na X ograniczonymi przez 1 i równoważnymi z metryką d.