Zadanie 2.48. Rozważ cząstkę o masie m znajdującą się w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, \\ -32\hbar^2/ma^2 & 0 \leq x \leq a, \\ 0 & x > a. \end{cases}$$

(a) Ile jest stanów związanych?

(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w stanie związanym o największej energii cząstka zostanie znaleziona poza studnią ($x > a$)? *Odpowiedź*: 0,542, więc nawet jeśli stan jest „związany” studnią, to jest bardziej prawdopodobne, że cząstka zostanie znaleziona na zewnątrz niż w środku!

*** **Zadanie 2.49**

(a) Pokaż, że

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{x_0^2}{2}\left(1 + e^{-2i\omega t}\right) + \frac{i\hbar t}{m} - 2x_0 x e^{-i\omega t}\right)\right]$$

spełnia zależne od czasu równanie Schrödingera dla potencjału oscylatora harmonicznego (równanie (2.44)). Tutaj x_0 jest dowolną stałą rzeczywistą o wymiarze długości[59].

(b) Znajdź $|\Psi(x,t)|^2$ i opisz ruch pakietu falowego.

(c) Oblicz $\langle x \rangle$ oraz $\langle p \rangle$ i sprawdź, czy twierdzenie Ehrenfesta (równanie (1.38)) jest spełnione.

** **Zadanie 2.50.** Rozważ *ruchomą* studnię potencjału w kształcie funkcji delta:

$$V(x,t) = -\alpha\delta(x - vt),$$

gdzie v jest (stałą) prędkością studni.

(a) Pokaż, że zależne od czasu równanie Schrödingera dopuszcza dokładne rozwiązanie[60]

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2} e^{-i\left[(E+(1/2)mv^2)t - mvx\right]/\hbar},$$

gdzie $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ jest energią stanu związanego *stacjonarnej* funkcji delta. *Wskazówka*: Uwzględnij to i *sprawdź*! Wykorzystaj wynik z zadania 2.23(b).

(b) Znajdź wartość oczekiwaną hamiltonianu w tym stanie i skomentuj wynik.

** **Zadanie 2.51. Swobodny spadek.** Wykaż, że

$$\Psi(x,t) = \Psi_0\left(x + \frac{1}{2}gt^2, t\right) \exp\left[-i\frac{mgt}{\hbar}\left(x + \frac{1}{6}gt^2\right)\right] \tag{2.176}$$

---

[59] Ten rzadki przykład dokładnego rozwiązania w postaci zamkniętej zależnego od czasu równania Schrödingera został odkryty przez samego Schrödingera w 1926 r. Jeden ze sposobów jego uzyskania został omówiony w zadaniu 6.30. Omówienie tego i pokrewnych problemów można znaleźć w W. van Dijk i in., *Am. J. Phys.*, **82**, 955 (2014).

[60] Zobacz wyprowadzenie w zadaniu 6.35.

spełnia zależne od czasu równanie Schrödingera dla cząstki w jednorodnym polu grawitacyjnym,

$$V(x) = mgx, \tag{2.177}$$

gdzie $\Psi_0(x, t)$ to swobodny gaussowski pakiet falowy (równanie (2.111)). Znajdź $\langle x \rangle$ jako funkcję czasu i skomentuj wynik[61].

*** **Zadanie 2.52.** Rozważ potencjał opisany funkcją

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \operatorname{sech}^2(ax),$$

gdzie a jest dodatnią stałą, a „sech" oznacza secans hiperboliczny.

(a) Narysuj tę funkcję potencjału.

(b) Sprawdź, czy ten potencjał ma stan podstawowy

$$\psi_0(x) = A \operatorname{sech}(ax),$$

i znajdź jego energię. Znormalizuj ψ_0 i narysuj wykres.

(c) Wykaż, że funkcja

$$\psi_k(x) = A\left(\frac{ik - a\operatorname{tgh}(ax)}{ik + a}\right)e^{ikx},$$

(gdzie $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$, jak zwykle) jest rozwiązaniem równania Schrödingera dla dowolnej dodatniej energii E. Ponieważ $\operatorname{tgh} z \to -1$, gdy $z \to -\infty$,

$$\psi_k(x) \approx Ae^{ikx}, \quad \text{dla dużych ujemnych } x.$$

Reprezentuje to więc falę nadchodzącą z lewej strony *bez towarzyszącej fali odbitej* (tj. bez członu $\exp(-ikx)$). Jaka jest asymptotyczna postać $\psi_k(x)$ dla dużej dodatniej wartości x? Jakie są R oraz T dla tego potencjału? *Komentarz*: To słynny przykład **potencjału bez odbicia**: każda przypadkowa cząstka, niezależnie od jej energii, przechodzi przez niego[62].

Zadanie 2.53. Macierz rozpraszania. Teoria rozpraszania uogólnia w dość oczywisty sposób arbitralnie zlokalizowane potencjały (rysunek 2.21). Po lewej stronie (obszar I) $V(x) = 0$, więc

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad \text{gdzie } k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{2.178}$$

Po prawej stronie (obszar III) $V(x)$ znowu jest równe zeru, więc

$$\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}. \tag{2.179}$$

[61] Pouczająca dyskusja: M. Nauenberg, *Am. J. Phys.*, **84**, 879 (2016).
[62] R.E. Crandall i B.R. Litt, *Annals of Physics*, **146**, 458 (1983).