Rozdział 4

Mocna indukcja

Indukcja matematyczna to mocna i ogólna metoda dowodzenia, choć czasami wydaje się niewystarczająca. Poniżej znajdziemy prosty przykład, który niemal, lecz nie do końca, wpasowuje się w ramy paradygmatu indukcji opisanego na stronie 32. Aby odpowiedzieć na pytanie, potrzebujemy mocniejszej wersji zasady indukcji.

Przykład 4.1. *Mamy prostą grę dwuosobową, do której potrzebna jest określona liczba monet. Nadajmy graczom imiona Ala i Brad. Ala robi pierwszy ruch, potem ruchy graczy są naprzemiennie. Gra ma dwie zasady.*

1. *W czasie swojego ruchu dany gracz zabiera jedną lub dwie monety.*
2. *Gracz, który zabierze ostatnią monetę, przegrywa.*
Jeśli obaj gracze grają najlepiej, jak to tylko możliwe, to kto wygra?

Odpowiedź zależy od tego, ile monet jest na początku gry. Nazwijmy tę liczbę n. Przyjrzyjmy się kilku przypadkom z różnymi wartościami n i przekonajmy się, czy można zauważyć jakąś prawidłowość.

- Jeśli $n = 1$, to Ala przegrywa, bo musi zebrać przynajmniej jedną monetę, a jest tylko jedna. Musi więc zebrać „ostatnią” monetę. Można powiedzieć, że gdy $n = 1$, to Ala jest na *przegranej pozycji*, bo w tej sytuacji może tylko przegrać (patrz rys. 4.1).
- Co jeśli $n = 2$? Oczywiście Ala przegra, jeśli niemądrze zabierze obie monety, ale analizujemy przypadek, w którym Ala i Brad grają tak dobrze, jak to tylko możliwe. Jeśli Ala weźmie jedną monetę, to zostawi jedną na stole i zmusi Brada do zagrania na przegranej pozycji. (Zwróćmy tu uwagę na coś bardzo ważnego: jeśli n jest dowolną przegraną pozycją dla Ali, to jest to również przegrana pozycja dla Brada, jeśli to on zostanie z n monetami). Tak więc rozpoczęcie z dwoma monetami jest *wygraną pozycją* dla Ali, ponieważ może ona zmusić Brada do zagrania na przegranej pozycji (patrz rys. 4.2).

Rysunek 4.1. Ala przegrywa

Rysunek 4.2. Ala wygrywa, jeśli $n = 2$