Ćwiczenie 3. Równowagi skorelowane vs. Nasha: istnienie (Peleg [162])

(1) Wykazać, że następująca gra:

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(-\infty, -\infty)$	$(3, 1)$	$(0, 2)$
a_2	$(1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, -\infty)$
a_3	$(2, 0)$	$(-\infty, 1)$	$(0, 0)$

nie posiada równowagi Nasha, ale każdy rozkład o postaci:

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	α	0
a_2	β	γ	0
a_3	0	0	0

gdzie $\alpha\beta\gamma > 0$ jest rozkładem skorelowanych równowag.

(2) Rozważyć grę z nieskończonym przeliczalnym zbiorem graczy $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Przyjąć, że każdy gracz dysponuje dwiema strategiami 0 lub 1 (tak więc $S^i = \{0, 1\}$). Funkcja wypłat gracza i jest następująca:

$$g^i(s) = \begin{cases} s^i, & \text{jeśli } \sum_j s^j < \infty \\ -s^i, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(a) Wykazać, że nie istnieją równowagi Nasha w strategiach czystych,

(b) Użyć Lematu Borela–Cantellego, by udowodnić, że nie istnieją również mieszane równowagi,

(c) Udowodnić, że rozkład $\mu = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}$ na $S = \Pi_i\, S^i = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ tworzy równowagę skorelowaną, gdzie
μ_1 jest produktem rozkładów $\mu_1 = \otimes_1\, \mu_1^i$, gdzie $\mu_1^i(s^i = 1) = \frac{1}{i}$,

μ_2 jest łącznym rozkładem, gdzie profil $(s^1 = 1, \ldots, s^i = 1, s^{i+1} = 0, \ldots, s^n = 0, \ldots)$ posiada prawdopodobieństwo $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$. (Zauważmy, że $\mathbb{P}_\mu(\sum s^i = \infty) = 1, \mathbb{P}_{\mu_2}(\sum s^i = \infty) = 0$ oraz $\mathbb{P}_{\mu_2}(s_i = 1) = \frac{1}{i}$).

Ćwiczenie 4. Rozkład równowag skorelowanych poprzez minimaks (Hart i Schmeidler [97])

Niech G będzie strategiczną grą dwuosobową o zbiorach strategii S^1 i S^2 oraz wypłatą $g : S = S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$. Rozważmy teraz grę Γ dwuosobową i o sumie zerowej ze zbiorami strategii S i $L = (S^1)^2 \cup (S^2)^2$ oraz wypłatą γ zdefiniowaną w sposób następujący:

$$\gamma(s; t^i, u^i) = (g^i(t^i, s^{-i}) - g^i(u^i, s^{-i}))\mathbf{1}_{\{t^i = s^i\}}.$$

(1) Sprawdzić, że Γ posiada wartość v oraz strategie optymalne,
(2) Wykazać, że jeśli $v \geqslant 0$ oraz $Q \in \Delta(S)$ jest strategią optymalną gracza 1, to Q jest rozkładem równowag skorelowanych w G,
(3) Niech $\pi \in \Delta(L)$ Definiujemy p^1, prawdopodobieństwo przejścia w S^1 następująco:

$$\rho^1(t^1; u^1) = \pi(t^1, u^1), \quad \text{if } t^1 \neq u^1,$$
$$\rho^1(t^1; t^1) = 1 - \sum_{u^1 \neq t^1} \pi(t^1, u^1).$$

Niech teraz μ^1 będzie prawdopodobieństwem przy niezmiennym S^1 pod p^1:

$$\mu^1(t^1) = \sum_{u^1} \mu^1(u^1)\rho(u^1; t^1).$$

Definiujemy p^2 i μ^2 i analogicznie niech $\mu = \mu^1 \times \mu^2$.
Wykazać, że wypłata $\gamma(\mu; \pi)$ może zostać rozłożona na wyrażenia o postaci

$$\sum_{t^1} \mu^1(t^1) \sum_{u^1} \rho(t^1; u^1)(g^1(t^1, \cdot) - g^1(u^1, \cdot))$$

a następnie wywnioskować, że

$$\forall \pi \in \Delta(L), \exists \phi \in \Delta(S) \text{ spełniający } \gamma(\phi, \pi) \geqslant 0.$$

(4) Dowieść istnienia rozkładu równowag skorelowanych w G,
(5) Rozszerzyć dowód do przypadku I graczy.

Ćwiczenie 5. Równowagi skorelowane: przypadek sumy zerowej

(1) Rozważmy dwuosobową skończoną grę o sumie zerowej zdefiniowaną przez $g : S = S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}$. Przy danym $\pi \in \Delta(S)$, niech $g(\pi) = \sum_{s \in S} \pi(s^1, s^2) g(s^1, s^2)$.

   (a) Wykazać, że jedyną wypłatą w równowagach skorelowanych $g(\pi)$ wynosi $v = \mathtt{val}\ g$.
   (b) Niech $\pi \in \mathrm{CED}(g)$ oraz $s^1 \in S^1$ posiadają dodatnie prawdopodobieństwo pod π. Wykazać, że prawdopodobieństwo warunkowe $\pi(\cdot|s^1) \in \Delta(S^2)$ stanowi optymalną strategię gracza 2.

(2) Rozważmy następującą grę o sumie zerowej [57]:

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	0	1
a_2	0	0	−1
a_3	−1	1	0