(Proton ma złożoną strukturę; składa się z trzech kwarków, a jego stosunek żyromagnetyczny nie jest tak prosty jak elektronu – zmierzona wartość czynnika g (g_p) dla protonu wynosi 5,59, a dla elektronu 2,00). Zgodnie z elektrodynamiką klasyczną dipol $\boldsymbol{\mu}$ wytwarza pole magnetyczne[29]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\boldsymbol{\mu}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \boldsymbol{\mu}\right] + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{\mu}\delta^3(\mathbf{r}). \tag{7.90}$$

Zatem hamiltonian elektronu w polu magnetycznym z powodu magnetycznego momentu dipolowego protonu jest równy (równanie (7.59))

$$H'_{\text{hf}} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\frac{\left[3\left(\mathbf{S}_p\cdot\hat{r}\right)\left(\mathbf{S}_e\cdot\hat{r}\right) - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\right]}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\delta^3(\mathbf{r}). \tag{7.91}$$

Zgodnie z rachunkiem zaburzeń poprawka pierwszego rzędu do energii (równanie (7.9)) jest wartością oczekiwaną zaburzającego hamiltonianu:

$$\begin{aligned} E^1_{\text{hf}} = {} & \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e}\left\langle\frac{3\left(\mathbf{S}_p\cdot\hat{r}\right)\left(\mathbf{S}_e\cdot\hat{r}\right) - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e}{r^3}\right\rangle \\ & + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e}\left\langle\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\right\rangle|\psi(0)|^2 . \end{aligned} \tag{7.92}$$

W stanie podstawowym (lub jakimkolwiek innym stanie, dla którego $\ell = 0$) funkcja falowa jest sferycznie symetryczna i zanika pierwsza wartość oczekiwana (zobacz zadanie 7.31). Tymczasem z równania (4.80) otrzymujemy $|\psi_{100}(0)|^2 = 1/(\pi a^3)$, więc w stanie podstawowym

$$E^1_{\text{hf}} = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3}\left\langle\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e\right\rangle. \tag{7.93}$$

Nazywa się to **sprzężeniem spinowo-spinowym**, ponieważ obejmuje iloczyn skalarny dwóch spinów (porównaj z sprzężeniem spinowo-orbitalnym, które dotyczy $\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$).

W obecności sprzężenia spinowo-spinowego indywidualne spinowe momenty pędu nie są już zachowywane, a „dobre" stany są wektorami własnymi *całkowitego* spinu:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p. \tag{7.94}$$

Jak poprzednio podnosimy do kwadratu, by uzyskać

$$\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_e^2 - S_p^2\right). \tag{7.95}$$

Jednak elektron i proton mają spin 1/2, więc $S_e^2 = S_p^2 = (3/4)\,\hbar^2$. W stanie trypletu (spiny „równoległe") całkowity spin wynosi 1, a zatem $S^2 = 2\hbar^2$. W stanie singletu spin całkowity wynosi 0, a $S^2 = 0$. Wobec tego

$$E^1_{\text{hf}} = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4}\begin{cases} +1/4 & \text{(tryplet)} \\ -3/4 & \text{(singlet)} \end{cases} \tag{7.96}$$

[29] Jeśli nie jesteś zaznajomiony z wyrazem zawierającym funkcję delta w równaniu (7.90), to możesz go wyprowadzić, traktując dipol jako wirującą naładowaną kulistą powłokę, w granicach, w których promień osiąga zero, a ładunek osiąga nieskończoność (przy stałym $\boldsymbol{\mu}$). Zobacz D.J. Griffiths, *Am. J. Phys.*, **50**, 698 (1982).

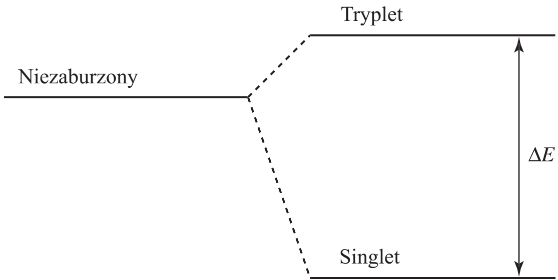
Sprzężenie spinowo-spinowe przerywa degenerację spinową stanu podstawowego, zwiększając energię konfiguracji trypletu i zmniejszając singletu (zobacz rysunek 7.12). Pojawiająca się przerwa energetyczna jest równa

$$\Delta E = \frac{4g_p\hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} = 5{,}88 \cdot 10^{-6}\mathrm{eV}. \tag{7.97}$$

Częstotliwość fotonu emitowanego przy przejściu ze stanu trypletu do stanu singletu wynosi

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1420 \text{ MHz}, \tag{7.98}$$

a odpowiadająca jej długość fali $c/\nu = 21$ cm, co przypada na obszar mikrofalowy. Ta słynna **21-centymetrowa linia** jest jedną z najbardziej rozpowszechnionych postaci promieniowania we wszechświecie.



Rysunek 7.12. Rozszczepienie nadsubtelne wodoru w stanie podstawowym

Zadanie 7.31. Niech **a** i **b** będą dwoma stałymi wektorami. Pokaż, że

$$\int (\mathbf{a}\cdot\hat{r})(\mathbf{b}\cdot\hat{r})\sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{7.99}$$

(całkowanie obejmuje zwykły zakres: $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$). Użyj tego wyniku, by wykazać, że

$$\left\langle \frac{3(\mathbf{S}_p\cdot\hat{r})(\mathbf{S}_e\cdot\hat{r}) - \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_e}{r^3} \right\rangle = 0,$$

dla stanów z $\ell = 0$. *Wskazówka*: $\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$. Najpierw oblicz całki po kątach.

Zadanie 7.32. Poprzez odpowiednią modyfikację wzoru dla wodoru wyznacz rozszczepienie nadsubtelne w stanie podstawowym dla: (a) **wodoru mionowego** (w którym mion, który zastępuje elektron, ma taki sam ładunek i czynnik g jak elektron, ale 207 razy większą masę), (b) **pozytonium** (w którym pozyton, który zastępuje proton, ma taką samą masę i czynnik g jak elektron, ale przeciwny ładunek) oraz (c) **mionium** (w którym antymion, który zastępuje proton, ma taką sama masę i czynnik g jako mion, ale przeciwny ładunek). *Wskazówka*: Nie zapomnij użyć masy zredukowanej (zadanie 5.1) do obliczenia „promienia Bohra” tych egzotycznych „atomów”, ale użyj *rzeczywistych*