(2) Niech C będzie niepustym wypukłym zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^K$, zaś F – półciągłą z góry korespondencją o zwartych, wypukłych i niepustych wartościach prowadzącą z C do tegoż zbioru.
Definiujemy przez indukcję gry $G_n = G(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ w $\mathcal{G}$ jak następuje: x_1 jest dowolne, $y_1 \in F(x_1)$ dla danej równowagi (σ_n, τ_n) w G_n, wprowadzamy $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \tau_n(i)\, y_i$ tak, jak powyżej, a następnie $y_{n+1} \in F(x_{n+1})$.

(a) Niech x^* będzie punktem akumulacji ciągu $\{x_n\}$. Niech $\varepsilon > 0$ zaś N niech będzie takie, że x_{N+1} oraz $x_m \in B(x^*, \varepsilon)$ dla pewnego $m \leqslant N$. Rozważmy równowagę (σ_N, τ_N) w $G_N = G(x_1, \ldots, x_N; y_1, \ldots, y_N)$ i wykazać, że $\{x_i, i \in S(\sigma_N)\} \subset B(x^*, 3\varepsilon)$ oraz $\{x_i, i \in S(\tau_N)\} \subset B(x^*, 3\varepsilon)$ Wywnioskować, że $x_{N+1} \in \mathrm{co}\{\bigcup_z F(z); z \in B(x^*, 3\varepsilon)\}$.
(b) Wywnioskować istnienie punktu stałego dla F.

Ćwiczenie 7. Gry wypukłe [155]
Gra wypukła jest dana przez zbiory strategii S_i i funkcji wypłat G_i z $S = \prod_{j \in I} S_j$ do $\mathbb{R}$, $i \in I$ spełniających:

(i) S_i jest zwartym wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej, dla każdego $i \in I$.
(ii) $G_i(\cdot, s_{-i})$ jest wklęsła na S_i, dla każdego s_{-i}, dla każdego $i \in I$.
(iii) $\sum_{i=1}^{n} G_i$ jest ciągła na S.
(iv) $G_i(s_i, \cdot)$ jest ciągła na S_{-i} dla każdego s_i, dla każdego $i \in I$.

Wprowadzamy funkcję Φ zdefiniowaną na $S \times S$ poprzez:

$$\Phi(s, t) = \sum_{i=1}^{n} G_i(s_i, t_{-i}).$$

(1) Udowodnić, że t jest równowagą Nasha wtw

$$\Phi(s, t) \leqslant \Phi(t, t), \quad \forall s \in S.$$

(2) Wykażmy istnienie równowagi gry wypukłej.
Założenie dowodu nie wprost: przypuśćmy, że dla każdego $t \in S$ istnieje takie $s \in S$, że

$$\Phi(s, t) > \Phi(t, t).$$

(a) Wykazać, że rodzina

$$(O_s = \{t \in S; \Phi(s, t) > \Phi(t, t)\})_{s \in S}$$

definiuje otwartą otoczkę S.
(b) Wywnioskować istnienie skończonej rodziny $(s^k)_{k \in K}$ takiej, że

$$\forall t \in S, \ \max_{k \in K} \Phi(s^k, t) > \Phi(t, t).$$

(c) Zaobserwować, że Θ zdefiniowane poprzez

$$\Theta(t) = \frac{\sum_{k \in K} \phi_k(t) s^k}{\sum_k \phi_k(t)},$$

o własności takiej, że $\phi_k(t) = (\Phi(s^k, t) - \Phi(t, t))^+$ jest odwzorowaniem ciągłym ze zbioru S w tenże, a stąd istnienie punktu stałego t^* dla Θ.

(d) Wreszcie otrzymać sprzeczność, jako że $\phi_k(t^*) > 0$ pociąga $\Phi(s^k, t^*) > \Phi(t^*, t^*)$.

4.13. Komentarze

Pojęcie równowagi Nasha (wraz z dowodem jej istnienia) po raz pierwszy pojawiło się w rozprawie Nasha. Następnie Nash przeprowadził kilka dowodów dla różnych ram, ale wszystkie z nich dotyczyły argumentu z punktu stałego.

Przeprowadzono wcześniej kilka prób sformułowania podobnego pojęcia (poczynając od Cournota), jednak czymś interesującym jest zaobserwować, że definicje formalne pojawiły się w tym samym okresie, co kilka wyników odpowiadających użytym narzędziom (Fan, Kakutani) – tak samo, jak powiązany, osadzony w teorii ekonomicznej dowód istnienia ogólnej równowagi (Arrow, Debreu), podczas gdy odpowiadające temu pojęcie wypracowane zostało przez Walrasa znacznie wcześniej.

Powiązanie między równowagami a wartościami/strategiami optymalnymi w grach o sumie zerowej jest podchwytliwe: istnienie wartości pociąga istnienie ε-równowag dla wszystkich $\varepsilon > 0$. Jednak dla danych strategii optymalnych (s, t) warunek optymalności dla gracza 1: $g(s, t') \geqslant g(s, t)(= v), \forall t'$ odpowiada najlepszej odpowiedzi (lub warunkowi równowagi) gracza 2. W terminach związanych z wartością gry ustala się wypłatę i zmienia strategie pozostałego gracza, a w równowadze dany gracz porównuje to do własnego zestawu strategii.

Zauważmy również, że w zależności od kontekstu interpretacja równowag może być różna. W oryginalnym sformułowaniu Nasha profil równowagi s jest normą albo odniesieniem, zaś warunkiem równowagi jest własność, którą każdy z graczy spełnia dla danej swojej funkcji wypłat. W szczególności fakt, że dane s stanowi równowagę nie jest znany graczom, jako że i nie zna g^{-i}, a więc nie może sprawdzić warunków zaistnienia równowagi.

U innych autorów, s jest pewną kolekcją przekonań, zaś s^{-i} to przekonania gracza i na temat zachowania swoich przeciwników. Wtedy informacje po grze są istotne, można na przykład sprawdzić, czy rzeczywiste ruchy przeciwników są zgodne z tymi przekonaniami. Bardziej ogólnie rzecz ujmując, w obecności sygnałów prowadzi to do sformułowania pojęcia przypuszczalnych lub samopotwierdzających się równowag (patrz więcej komentarzy w [200]). Gracze mogą również żywić osobiste przekonania, które są łącznie niespójne, ale dla każdego gracza zgodne z jego obserwacjami (Selten).