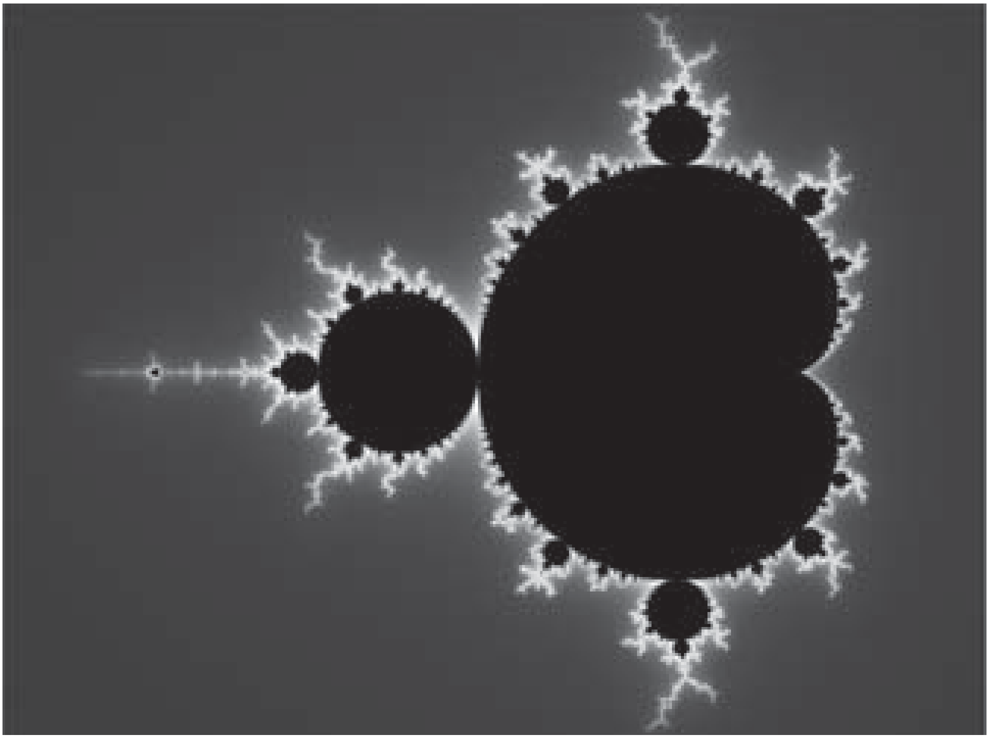
Georg Cantor w 1883 roku zaproponował prostą do wykonania konstrukcję matematyczną. Domknięty odcinek [0,1] należy podzielić na trzy równe części, a następnie usunąć środkową z nich. Z pozostałymi dwoma odcinkami trzeba postąpić analogicznie. Podobnie należy uczynić z czterema odcinkami na kolejnym poziomie podziału. Procedurę tę trzeba kontynuować nieskończoną ilość razy. W ten sposób narodził się pierwszy w dziejach świata fraktal, choć nie został jeszcze wówczas tak nazwany. Stworzony obiekt uzyskał nazwę zbioru lub pyłu Cantora.

Pomysł Cantora nie zyskał jednak uznania w oczach współczesnych mu kolegów po fachu. Charles Hermite (1822–1901), francuski matematyk, stwierdził, że prace Cantora nie mają sensu, dopóki nie zostanie odkryty jakiś głębszy sens odwzorowania linii na powierzchnię. Ówczesna matematyka nie radziła sobie bowiem z obiektami, których „prawie nie ma", a taki wydawał się właśnie zbiór Cantora. Co gorsza, na ten obiekt można było spojrzeć nie tylko z jednego punktu widzenia. Jego makroskopowy, „dążący do nicości" obraz zupełnie nie różnił się od tego, który uwidaczniał się w skali mikroskopowej. Schodząc „w głąb" na dowolnie „niski" poziom struktura zbioru pozostawała bowiem niezmienna i można ją było badać dostępnymi metodami analizy i topologii. Choć z formalnego punktu widzenia trudno było Cantorowi cokolwiek zarzucić, „rozdwojenie jaźni" jego dzieła, a co za tym idzie kłopoty z interpretacją, sprawiło, że na temat tej i innych jego prac pojawiło się wiele krytycznych opinii.

Spośród innych obiektów geometrycznych fraktale wyróżniają się dwiema cechami: samopodobieństwem (w każdej skali fraktal jest taki sam albo, mówiąc inaczej, fraktal jako całość jest podobny do swoich części) i wymiarem, który nie musi być liczbą całkowitą. Chciałbym zatrzymać się przy tej drugiej właściwości. Wprowadzenie jej w świat fraktali zawdzięczamy Benoît Mandelbrotowi (1924–2010), francuskiemu matematykowi. To jego właśnie uważa się za „ojca" fraktali (rysunek 18), ponieważ użył tego określenia w stosunku do obiektów mających dwa wspomniane wyżej przymioty.

Rozpatrując pył Cantora, nie można powiedzieć, że jest on punktem. Jest jednak czymś znacznie mniejszym niż odcinek. Zarówno przypisanie mu wymiaru 0, jak i wymiaru 1 nie byłoby więc właściwe. Dobrze byłoby zatem znaleźć jakiś opis, który w lepszy sposób odzwierciedla tę własność zbioru. Głowiąc się nad tym zagadnieniem w przypadku różnych fraktali, Mandelbrot zdecydował się na przepis stworzony przez Felixa Hausdorffa (1868–1942), matematyka niemieckiego. Definicja wymiaru Hausdorffa jest trudna, dlatego najlepiej przedstawić ją na przykładzie. Do tego celu wybiorę obiekt, którego wynalazcą był Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924), matematyk szwedzki.

Algorytm generowania krzywej Kocha, zwanej również płatkiem Kocha (rysunek 19), jest prosty i częściowo podobny do konstrukcji pyłu Cantora. Różnica polega na tym, że w krzywej Kocha odcinek początkowy może mieć dowolną długość l, a po jego podziale na trzy równe części usuniętą część środkową zastępuje się dwoma odcinkami o długości 1/3 l (krok 1). W kolejnych krokach operację tę wykonuje się dla wszystkich istniejących odcinków. Każdy krok polega więc na trzykrotnym zmniejszeniu skali (l, l/3, l/9, l/12 itd.)



Rysunek 18. | Fraktal Mandelbrota
Źródło: Wikipedia (4)

i czterokrotnym zwiększeniu liczby elementów (1, 4, 16, 64 itd.). W krzywej Kocha, biorąc trzy razy mniejsze jednostki, mieści się ich zatem cztery razy więcej. Wymiar zbioru, oznaczony literą d, można w takim razie zapisać jako $3^d = 4$, z czego wynika, że $d = \ln 4/\ln 3 \approx 1{,}26$.

Mandelbrot „miał nosa", wybierając tę, a nie inną definicję wymiaru dla fraktali. Z punktu widzenia topologicznego krzywa Kocha jest po prostu linią łamaną o wymiarze 1, ale takie uproszczenie gubi informację o jej wewnętrznej strukturze. Zastosowanie definicji Hausdorffa „dodaje jej głębi", przez co umożliwia lepsze poznanie jej właściwości. Wymiar stanowi zatem istotną informację o danym fraktalu i pokazuje, jak bardzo różni się on od gładkich obiektów klasycznych, których wymiar opisywany jest zawsze liczbą całkowitą. Dzięki temu można powiedzieć, ile „pustki" zawiera dany obiekt.

Ułamkowość wymiaru fraktali jest ceną, jaką płaci się za zdobycie dodatkowej wiedzy o tych obiektach. Co gorsza, wymiar może być liczbą niewymierną, a one, jak pamiętamy z podrozdziału *Liczby*, budziły wstręt pitagorejczyków i były przez wielu uczonych uważane za „niedoskonałe". Okazuje się jednak, że ponownie można się posłużyć czymś tak niedoskonałym. Strukturę fraktalną mogą mieć bowiem porowate skały, szczyty górskie, chmury, fiordy, błyskawice, kwiaty kalafiorów, dendryty, systemy naczyń krwionośnych lub oddechowych (oskrzela) czy nawet sam Wszechświat do odległości 2 gigaparseków