

## 14.1 PROBLEM: REGUŁA WARIACYJNA DLA DWUWYMIAROWEGO UKŁADU ELEKTROSTATYCZNEGO I TEORIA JEDNOZNACZNOŚCI

W ramach tego projektu rozważymy dwuwymiarowy układ, dla którego równanie Poissona (12.0.2) przyjmuje postać

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x, y) = -4\pi\rho(x, y), \quad (14.1.1)$$

które wraz z warunkami brzegowymi prowadzi do zagadnienia warunków brzegowych (analogicznego do tego diskutowanego w rozdz. 5). Zapisany tam funkcjonal (8.1.2) w układzie dwuwymiarowym ma postać

$$F[\phi] = \int_S d^2\mathbf{r} \left[ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\right)^2 \right] - 4\pi\rho(x, y)\phi(x, y) \right]. \quad (14.1.2)$$

Korzystając z okazji, że zbliżamy się bardziej do fundamentów elektrostatyki, której zasadnicze pytanie sprowadza się do: *Jaki jest potencjał pola elektrycznego przy zadanym rozkładzie ładunków?*, chcielibyśmy poświęcić odrobinę czasu pewnej osobliwości rozwiązań tego problemu. Rzeczą znaną osobom, które poświęciły tej dziedzinie fizyki nieco czasu, ale zarazem nietrywialnym zagadnieniem jest zastanowienie się nad jednoznacznością uzyskanych rezultatów. To znaczy stawiamy pytanie, czy uzyskane rozwiązanie dwuwymiarowego równania Poissona jest zadane jednoznacznie przez warunki brzegowe. Inaczej moglibyśmy bowiem mieć do czynienia z taką sytuacją, jak z nakrętką w słoiku lub butelce, dla której istnieje kilka możliwych pozycji. W naszym przypadku oznaczałoby to, że funkcjonal miałby nie jedno, a kilka minimów globalnych.

Pytanie to zadajemy w tym miejscu, przed przystąpieniem do rozważań numerycznych omawianego problemu, gdyż zagadnienie to ma głębszy charakter niż problem rachunkowy, tkwi bowiem w analitycznym podejściu do szukania rozwiązań pola. Należy spodziewać się, że jednoznaczność rozwiązania nie wynika z wybranej metody jego szukania, ale z praw, które je definiują.

Powinno być bowiem jasne zarówno wtedy, gdy kierujemy się przecuciem, jak i wtedy, gdy opieramy się na doświadczeniu, że wyznaczony potencjał jest zawsze obliczany jednoznacznie. Inaczej moglibyśmy podejrzewać, że świat, jak i każdy inny układ, istniałby w jednym z wielu metastabilnych stanów pod względem rozkładu pola elektrycznego i w wyniku pewnych, trudnych do określenia czynników mógłby przeskakiwać między nimi, co nie ma miejsca. Dowodzi tego teoria jednoznaczności pod postacią dwóch praw. Stąd oczekujemy, że dowolne warunki początkowe zawsze powinny doprowadzić do tego samego rezultatu, co czytelnik

powinien sprawdzić w ramach jednego z zadań. Czytelnika szczególnie zainteresowanego wspomnianymi dowodami odsyłamy do materiałów dodatkowych, gdzie przedstawiono obie teorie (A.6).

## 14.2 METODY NUMERYCZNE: METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DLA UKŁADU 2D

Podobnie jak w przypadku wcześniejszych problemów dokonamy dyskretyzacji przestrzeni, w której będziemy pracować, to znaczy wprowadzimy siatkę punktów, na której będziemy wykonywać rachunki, przy czym rozpoczniemy od przypadku siatki prostokątnej, dla której parametr siatki w obu kierunkach może się różnić  $(h_x, h_y)$ . W wyniku dyskretyzacji funkcjonal (14.1.2) przyjmuje postać:

$$F[\phi] = \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=2}^{N_i-1} \sum_{j=2}^{N_j-1} \left[ \frac{(\phi_{ij} - \phi_{i-1j})^2}{h_x^2} + \frac{(\phi_{ij} - \phi_{ij-1})^2}{h_y^2} \right] h_x h_y \sum_{i=2}^{N_i-1} \sum_{j=2}^{N_j-1} 4\pi\rho_{ij}\phi_{ij}. \quad (14.2.1)$$

Po dyskretyzacji funkcjonal staje się funkcją wielu zmiennych,  $F(\phi) \rightarrow F(\phi_{ij})$ , a warunek zerowania się wariacji  $\delta F$  sprowadza się do warunku zerowania się pochodnych cząstkowych:  $\partial F / \partial \phi_{ij} = 0$ . Stosując ten warunek, otrzymujemy:

$$\phi_{ij} = \frac{h_x^2 h_y^2 4\pi\rho_{ij} + h_y^2(\phi_{i-1j} + \phi_{i+1j}) + h_x^2(\phi_{ij-1} + \phi_{ij+1})}{2(h_x^2 + h_y^2)}, \quad (14.2.2)$$

co w szczególnym przypadku siatki kwadratowej  $h_x = h_y \equiv h$  upraszcza się do

$$\phi_{ij} = \frac{1}{4} \left( h^2 4\pi\rho_{ij} + \phi_{i-1j} + \phi_{i+1j} + \phi_{ij-1} + \phi_{ij+1} \right). \quad (14.2.3)$$

Dokładne wyprowadzenie powyższych zależności pozostawiamy w materiałach dodatkowych na końcu książki (A.7). Co ciekawe, powyższą relację moglibyśmy również uzyskać nieco prościej przez dyskretyzację równania Poissona (5.1.2) lub bezpośrednio ze wzoru na średnią potencjału (A.6.1) w dwóch wymiarach, które dla  $\rho(\mathbf{r}) = 0$  ma postać średniej arytmetycznej  $\phi_{ij} = \frac{1}{4}(\phi_{i-1j} + \phi_{i+1j} + \phi_{ij-1} + \phi_{ij+1})$ . Należy zwrócić uwagę, że warunki brzegowe mogą być tu określone nie tylko na brzegach obszaru, ale również w jego wnętrzu, poprzez zadanie ustalonych wartości w wybranych węzłach siatki. W ten sposób można symulować różne układy elektrostatyczne (kondensator, klatkę Faradaya, ładunki punktowe).

Podsumowując, algorytm rozwiązania nie różni się zasadniczo od tego dla przypadku kondensatora cylindrycznego (przypadku kwazijdnowymiarowego). Kolejne kroki to:

1. Wyjdź z jakiejś początkowej funkcji  $\phi_{ij}$  (np. płaszczyzny  $\phi(x_i, y_j) = a$ , pomiędzy  $\phi(0, y_j), \phi(x_i, 0), \phi(x_{N_i}, y_j), \phi(x_i, y_{N_j})$ ), wyłączając wybrane punkty o ustalonych wcześniej wartościach;
2. Nową wartość  $\phi_{ij}$  oblicz ze wzoru (14.2.2) w każdym punkcie siatki  $x_i, y_j$  (poza punktami brzegowymi);
3. Dla nowych wartości  $\{\phi_{ij}\}$  oblicz wartość funkcjonału  $F[\phi]$  (14.2.1);
4. Powtórz procedurę, aż wartość ta się ustabilizuje, uzyskując oczekiwaną różnicę  $F[\phi^{new}] - F[\phi^{old}]$  poniżej  $\varepsilon$ .

Procedurę tę można nieco zmodyfikować przez mieszanie potencjałów  $\phi_{ij}$ :

$$\phi'_{ij} = \phi_{ij}^{new} \omega + \phi_{ij}^{old} (1 - \omega), \quad (14.2.4)$$

gdzie  $\phi_{ij}^{new}$  jest nowym rozwiązaniem liczonym na podstawie starej wartości (14.2.2)  $\phi_{ij}^{old}$ . Przypadek dwuwymiarowy wprowadza jednak nową swobodę w układzie. Mamy tu na myśli wybór kolejności aktualizowania wartości. Można bowiem brać już nowe wartości  $\phi$  w sąsiednich węzłach, ale wtedy może okazać się, że wybór kolejności aktualizowania (losowo, rzędami, kolumnami, rzędami i kolumnami jednocześnie) może wpłynąć na efektywność obliczeń. W ramach zadań czytelnik powinien sprawdzić różne możliwości.

### 14.3 ZADANIA

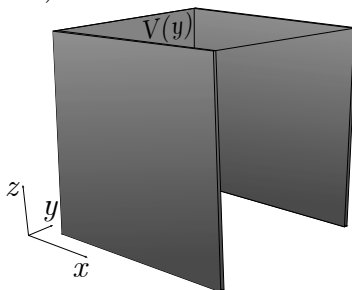
#### Testowanie algorytmu

1. Zapoznaj się z działaniem programu 2DPOISSON przez przetestowanie różnych warunków brzegowych i parametrów kontrolnych.
2. Zbadaj efekt mieszania potencjałów. Znajdź zakres parametru  $\omega$ , dla którego algorytm jest zbieżny, oraz sprawdź, kiedy algorytm zbiega najszybciej. *Wskaźówka* – zbieżność może zależeć od rozkładu ładunków.
3. Wykonaj w pełni zbieżne obliczenia dla warunków brzegowych, dla których znane są rozwiązania analityczne, i porównaj wyniki z rozwiązaniem analitycznym.
4. Zweryfikuj teorię jednoznaczności. W tym celu wyznacz potencjał dla wybranego rozkładu ładunków z zadanymi warunkami brzegowymi dla różnych warunków początkowych procedury iteracyjnej.

## Zastosowanie modelu

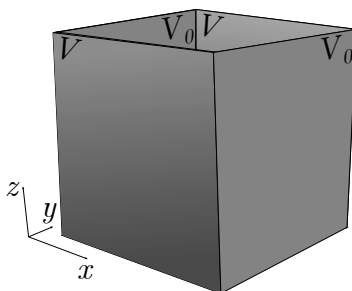
1. Rozważ dwie metalowe, nieskończone (w kierunku  $Z$ ), uziemione (potencjał 0) płaszczyzny  $y = 0$  i  $y = +a$  o zadanej szerokości  $l$ , połączone trzecią płaszczyzną  $x = 0$ , na której zadany jest rozkład potencjału  $V(y)$  (rys. 14.1). Znajdź potencjał pomiędzy płaszczyznami dla:

- $V(y) = V_0$ ,
- $V(y) = V_0 y$ ,
- $V(y) = -V_0 y(y - a)$ .



Rysunek 14.1. Schemat układu omówionego w zadaniu 5 – dwie płaszczyzny połączone wzdłuż

2. Rozważ dwie metalowe, nieskończone (w kierunku  $Z$ ) płaszczyzny o szerokości  $l$  w  $y = 0$  i  $y = +a$  o stałym potencjale  $+V$ , które są:
- odizolowane;
  - połączone dwiema płaszczyznami o stałym potencjale  $V_0$  (rys. 14.2):
    - $0 < V_0 < V$ ,
    - $V < V_0$ ,
    - $0 < V_0 < V$  na pierwszej  $V < V_0$  na drugiej.



Rysunek 14.2. Schemat układu omówionego w zadaniu 6