Zadania

10.1. Pięć spośród wymienionych poniżej zdań jest równoważnych negacji pozostałych pięciu. Dopasuj każde zdanie do jego negacji.

(a) $p \oplus q$
(b) $\neg p \wedge q$
(c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
(d) $p \Rightarrow q$
(e) $p \wedge \neg q$
(f) $q \wedge (p \wedge \neg p)$
(g) $p \vee \neg q$
(h) $p \Leftrightarrow q$
(i) $p \wedge (q \vee \neg q)$
(j) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

10.2. Wykaż, że formuła (10.1) jest niespełnialna.

10.3. Dla każdej podanej poniżej formuł zdecyduj, czy jest to tautologia, formuła niespełnialna, czy formuła spełnialna. Odpowiedź uzasadnij.

(a) $(p \vee q) \vee (q \Rightarrow p)$
(b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
(c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
(d) $(\neg p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p)$
(e) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
(f) $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

10.4. Zapisz następującą formułę:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee (p \wedge \neg s))$$

(a) w koniunkcyjnej postaci normalnej
(b) w dysjunkcyjnej postaci normalnej

10.5. (a) Wykaż, że dla dowolnych formuł α, β, γ,

$$(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \vee \gamma \equiv \alpha \vee \gamma .$$

(b) Podaj odpowiednią regułę do uproszczenia

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \wedge \gamma .$$

(c) Znaleźć możliwie najprostsze normalne postaci koniunkcyjną i dysjunkcyjną formuły: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \oplus q)$.

10.6. W każdym z poniższych przypadków wykaż, że dana formuła jest tautologią lub wskaż, dlaczego nie jest.

(a) $((p \wedge q) \Leftrightarrow p) \Rightarrow q$
(b) $(p \vee (p \wedge q)) \Rightarrow (p \wedge (p \vee q))$
(c) $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

10.7. W tym problemie wykaż, że przekształcenie formuły do jej koniunkcyjnej postaci normalnej może zwiększyć jej długość wykładniczo. Rozważ formułę

$$p_1 \wedge q_1 \vee \ldots \vee p_n \wedge q_n,$$

gdzie $n \geq 1$, zaś p_i i q_i to zmienne zdaniowe. Ta formuła ma długość $4n - 1$, jeśli liczymy każde wystąpienie spójnika lub zmiennej zdaniowej i ignorujemy domyślne nawiasy.

(a) Zapisz koniunkcyjną postać normalną tej formuły dla $n = 3$
(b) Jak długa jest tak otrzymana postać normalna, jeśli stosujemy tę samą konwencję pomiaru długości, co powyżej? W przypadku ogólnym, ile wynosi długość koniunkcyjnej postaci normalnej wyrażona jako funkcja n?
(c) Wykaż, że w analogiczny sposób przekształcenie formuły na jest dysjunkcyjną postać normalna może zwiększyć jej długość wykładniczo.
(d) Rozważmy następujący algorytm sprawdzania, czy dana formuła jest spełnialna. Korzystając z metod opisanych w tym rozdziale, przekształć daną formułę w jej dysjunkcyjną postać normalną. Następnie sprawdź, czy wszystkie klauzule formuły zawierają sprzeczność (zawierając zarówno daną zmienną, jak i jej dopełnienie. Jeśli to nie zachodzi, to formuła jest spełnialna. Dlaczego jest to algorytm o koszcie wykładniczym?

10.8. Zapisz zarówno koniunkcyjną, jak i dysjunkcyjną postać normalną zdania: „Przynajmniej dwa z p, q i r są prawdziwe".

10.9. W tym zadaniu poznajemy *dowodzenie twierdzeń metodą rezolucji*.

(a) Przypuśćmy, że $(e_1 \vee \ldots \vee e_n)$ oraz $(f_1 \vee \ldots \vee f_n)$ są klauzulami formuły α będącej w koniunkcyjnej postaci normalnej, gdzie $m, n \geq 1$, zaś każde z e_i, f_j to literał. Załóżmy, że wszystkie e_i różnią się od siebie oraz że wszystkie f_j różnią się od siebie, tak że klauzule te są zasadniczo zbiorami literałów. Przypuśćmy, że e_m jest zmienną zdaniową p, zaś $f_1 = \neg p$. Wykaż, że α jest równoważne rezultatowi dodania nowego czynnika do α składającego się ze wszystkich literałów występujących w obu tych klauzulach z wyjątkiem p z pierwszej klauzuli i $\neg p$ z drugiej. To znaczy:

$$\alpha \equiv \alpha \wedge (e_1 \vee \ldots \vee e_{m-1} \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n),$$

lub – dokładniej – rezultatowi pominięcia wszystkich duplikatów w tej klauzuli. Nowa klauzula jest otrzymywana z pozostałych dwóch za pomocą *rezolucji* i mówimy wtedy, że jest ona ich *rezolwentem*. Aby nadać jakiś sens temu wyrażeniu w przypadku $m = n = 1$, musimy zinterpretować *pustą klauzulę* zawierającą zero literałów jako zawsze fałszywą – co ma sens, jeśli pamiętamy, że otrzymuje się ją z dwóch klauzul $(p) \wedge (\neg p)$. Pusta klauzula jest, innymi słowy, kolejną nazwą zdania zawsze fałszywego `F`.
Wynika z tego, że formuła jest niespełnialna, jeśli w powtarzanym procesie formowania rezolwentów i dodawania ich do formuły otrzymamy w wyniku pustą klauzulę.

(b) Wykaż, że prawdziwe jest odwrócenie części (a); to znaczy, jeśli w wyniku procesu tworzenia rezolwentów i dodawania ich do formuły nie powstaje pusta klauzula, to wtedy oryginalna formuła (i wszystkie formuły jej równoważne utworzone z niej przez rezolucję) są prawdziwe przy pewnym wartościowaniu. *Wskazówka*: Niech C będzie formułą utworzoną poprzez dodawanie do niej nowych rezolwentów tak długo, aż żaden nowy nie może zostać utworzony (dlaczego ten proces się kończy?). Przypuśćmy, że C jest niespełnialna, ale wśród wywiedzionych klauzul nie ma klauzuli pustej. Jeśli oryginalna formuła zawiera k zmiennych zdaniowych $p_1, \ldots, p_k$, to niech C_i będzie formułą składającą się z wyłącznie tych klauzul z C, w których zmienne zdaniowe znajdują się wśród $p_i, \ldots, p_k$ (więc $C_1 = C$). Udowodnij przez indukcję po i, że dla każdego $i = 1, \ldots, k + 1$ żadne wartościowanie zmiennych $p_i, \ldots, p_k$ nie sprawia, że C_i jest prawdziwe. Jedyną jednak klauzulą, która mogłaby być fałszywa z $C_k + 1$ jest klauzula pusta, co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód.